أسس المنطق الرياضي

وتطوره

دكتور
علي عبد المعطي محمد
كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

دكتور
ماهر عبد القادر محمد
كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

١٩٩٣

دار المعرفة الجامعية
٤٠ ش سوتير - إسكندرية
ت : ٤٨٣٠١٦٣

أسس المنطق الرياضي

وتطوره

دكتور
علي عبد المعطي محمد
كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

دكتور
ماهر عبد القادر محمد
كلية الآداب - جامعة الإسكندرية

١٩٩٢

دار المعرفة الجامعية
٤٠ ش سوتير - إسكندرية
ت : ٤٨٣٠١٦٣

إهداء

إلى العالم الجليل والفيلسوف الصادق

الأستاذ الدكتور محمد على أبو ريان

هذه هى الطبعة الثانية من كتاب اسس المنطق الرياضى وتطوره الذى صدرت طبعته الأولي عن دار الجامعات المصرية عام ١٩٧٥ وفيها نؤكد أن المنطق الرياضى لم يقم من فراغ، ولم يولد ولادة حديثة مفاجئة، ولم يظهر في الأفق دفعة واحدة. إنه كان نتيجة تطور طويل حدث في ميدان المنطق ... وجعله ينتقل من منطق صوري قديم إلى منطق رياضى حديث.

وضع أرسطو أصول المنطق الصوري، وشيد بناء منطقيا رائعا، وفى ثنايا هذا البناء وجدت ارهاصات المنطق الحديث : إن في الموضوع، وإن في المنهج، وإن فى الغرض ... وجدت هذه الارهاصات أو البدايات أو البذور في صميم البناء المنطقى الأرسطى، وكانت محتاجة إلى تطوير وانضاج ساهم فيه مفكرون ومنطقيون ورياضيون كثيرون منهم أرسطو نفسه الذي وجدت عنده بذور المنطق الحديث ثم الرواقيون ثم ديكارت وليبتز ووليم هاملتون ودى مورجان وجورج بول وبيانو وفريجة، ولقد أنضج كل واحد من هؤلاء المنطق من نقطة معينة وسار به خطوة متقدمة نحو الأمام .. وتجمعت هذه الخطوات المتتالية ، والخيوط المتتابعة ، عند رسل وهوايتهد فأقاما المنطق الرياضى كاملا مستفيدين من التطور السابق الطويل الذي لحق بالمنطق الصورى والذى كان يستهدف نقله إلى صورة رياضية متطورة.

لقد إنصب رأينا في القضية السابقة على الاتجاه القائل بأن المنطق الرياضى الحديث لم يكن هدما للمنطق الصوري القديم وإنما كان مجرد تطوير له، وبناءً علي هذا الرأى كان علينا أن نتعقب هذا التطور الضخم الذي حدث في هذا الميدان متوقفين بعض الشيء عند المنطق الأرسطى ، مشيرين إلى لمحاته العامة وبذور وإهاصات المنطق الرياضى المتضمنة فيه ثم مبينين سير عجلات التطور إلى أن انتهى التطور بتشييد البناء المنطقي الرياضى فى

صورته النهائية..

وحينما وصلنا إلى رسل الذى تجمعت لديه الخيوط ورتبها وأعطاها سمات التناسق والتكامل، كان علينا أن نتوقف قليلا عند نقد رسل للمنطق الأرسطي، وموقفه من أساس المنطق الرياضي ومن القضية الذرية والقضية الجزيئية.

وكان لابد لنا - طالما أننا نتحدث عن منطق رياضي - أن نشير إلى الصلة بين المنطق والرياضة، وقد تم تناول هذا المبحث من خلال معالجتنا لمذاهب خمسة هى مذهب التشابه الظاهري ، ومذهب جبر المنطق ، والمذهب اللوجستيقي والمذهب الاكسيوماتيكى ، ومذهب الحدسى..

هذا وقد قام الاستاذ الدكتور علي عبد المعطي محمد بكتابه الفصل الأول عن المنطق الصوري وتعريفاته وأقسامه ، والفصل الثاني عن المنطق علم قوانين الفكر. وكذلك الباب الثالث عن الصلة بين المنطق والرياضة كاملا.

وكتب الاستاذ الدكتور ماهر عبد القادر الباب الثاني بعنوان رسل بين المنطق التقليدى وبين المنطق الرياضى كاملا ، والباب الرابع بعنوان نظريات المنطق الرياضى كاملا وفيه نظرية حساب القضايا (اللوجستيقا) ، ونظرية حساب المحمول، ونظرية الفصول ، ونظرية العلاقات. وكذلك الباب الخامس عن نظرية الأوصاف. أما الفصل الثالث من الباب الأول فقد دون بالاشتراك.

والله ولى التوفيق

أ. د. على عبد المعطى محمد　　　　أ. د. ماهر عبد القادر

الاسكندرية في

أول أغسطس ١٩٩٢

الباب الأول

من المنطق الصورى إلى المنطق الرياضى

الباب الأول

من المنطق الصورى إلى المنطق الرياضى

قضيــة خطيرة سوف نحققها هنـا وهى : هـل كان المنطق الصورى أرهاصـا للمنطـق الرياضى ، وبداية ضرورية له ، أو أن المنطق الرياضى ولد هـكذا جديداً ومعاصراً للتيارات المنطقية والرياضية المعاصرة ؟

لقد حاول فريق من المناطقة أن يفكر إمكان قيام المنطق الرياضى ابتداء من المنطق الصورى الأرسطاطاليسى القديم، وذهبوا إلى أن أسس وعناصر وبناءات المنطق الرياضى مختلفة تماما عن المنطق القديم ، بل هاجموا هذا المنطق : المنطق القديم من ناحية شكليته وتوتولوجيته وعدم دقته ، هاجموه من ناحية احتوائه على حدود كلية ، وكلمات وأسماء لغوية تعيق الاستدلال ، وتعرقل انتقال الفكر من قضية إلى أخرى ، ولم يقبـلوا حصر أرسطو للاستنباط فى القياس وحـده ، كما لم يقبلوا منهجـه الرمزى الناقص ، والذى انحصر فى ترميز المتغيرات المنطقيـة Logical variables دون ترميز الثوابت المنطقية Logical Constants ، وكذلك لم يقتنعوا بمحاولة أرسطو نحو تحقيق فكرة النسق الاستنباطى Deductive system ، والذى أشار إليه وفشل فى تحقيقه لمسائل متعلقة بالناحية المنهجية الرمزية .

إلا أن الدراسات المنطقية المتكاثرة والمعاصرة قد ذهبت إلى اتجاه آخر مباين لاتجاه الفريق الأول تماما . فلقد أكدت هذه الدراسات على أن المنطق الرياضى ما هو إلا تطوير وإصلاح للنطق الصورى القديم ان فى الموضوع ، وإن فى المنهج ، وإن فى الغرض أو الهـدف الذى يهدف إليـه . ولقد استندت هـذه الدراسات على الصلات الوثيقـة القائمة بين المنطقـين من محاور ثلاث رئيسية ؛

فموضوع المنطق الصورى والمنطق الرياضي معـــا هو الاستنباط Deduction مع فارق واحـــد هو أن الاستنباط فى المنطق الرياضى يتحدث عن علاقات استنباطية أكثر مما نجدها في المنطق الصوري والذى حصر الاستنباط فى القياس وحده . كما أن المنهج فى المنطقين واحد هو المنهج الرمزى، إلا أن المنطق الرياضى خصوصاً فى صورته المعاصره تميز بدقة رمزية أعظم ، تيسر عمليات الاستنباط ، وتتيح للعقل البشرى أن ينتقل بسهولة من قضية لأخرى ، تلك السهولة التى لم تكن مستطاعة التطبيق بالنسبة للمنطق الصورى والذى كانت رموزه ناقصة ، وجهازه الرمزى يشوبه الخلل، بما احتواه من كلمات وأسماء لغوية تشير إلى ثوابتة.

تمكن المنطق الرمزى من أن يقيم نفسه على هيئة نسق استنباطى ، ولقد تحقق له ذلك بسبب دقة وكفاءه جهازه الرمزى من جهة ، واتساع عمليات الاستنباط فيه من جهة أخرى ، أما واضح المنطق الصورى فلقد تنبه إلى ضرورة قيام المنطق على هيئة نسق استنباطى باعتبار أن المنطق عنده ينضم إلى مجموعة العلوم البرهانية Demonstrative sciences ، ولكنه لم يستطع أن يحقق هذا لعدم كفاءة جهازه الرمزى ، ولحصره للاستنباط فى القياس ، ولكن كان الهدف واحدا عند أرسطو وعند أصحاب المنطق الرياضى وهو ضرورة قيام المنطق على هيئة نسق استنباطى .

وحينما أثبتت الدراسات المنطقية هذا ، ذاعت الصيحات القائلة بان المنطق الرياضى ليس هدما للمنطق الصورى القديم انه فقط مجرد تطوير أو تحديد أو إصلاح له . فإذا أخذنا بهذا الرأى الأخير — ونحن آخذون به — فلابد من أن نتعقب خطوات كبار المناطقه والمفكرين التى أسهمت فى إصلاح المنطق القديم وتجديده وتطويره حتى صار منطقا رياضيا . ولابد لنا أيضا من أن

نكشف النقاب — ولو قليلا — عن المنطق الصورى الأرسطاطاليسى ، لنرى صورة خاطفة عن هذا المنطق الذى تم تطويره فأصبح رياضيا . ولهذا فسوف يتكون هذا الباب من فصول ثلاثة : نتناول فى أولها تعريفات المنطق وأقسامه ، ونتناول فى ثانيها المنطق باعتباره علما لقوانين الفكر ، ثم نتعرض فى آخرها لخطوات تطوير المنطق ذاته منذ كان صوريا حتى أصبح رياضيا .

الفصل الأول

المنطق الصورى ؛ تعريفاته واقسامه

ا — معنى الكلمة .

ب — تعريفات المنطق .

حـ — أقسام المنطق الصورى .

و — التصورات والتعريفات .

الفصل الأول

المنطق الصورى : تعريفاته وأقسامه

ا — معنى الكلمة :

تشير كلمة المنطق من ناحية الاشتقاق اللغوى إلى الكلام أو النطق ، كما تشير من ناحية أخرى — إذا ابتعدنا عن الأصل اللغوى واقتربنا من الكلمة اليونانية λόγος — إلى العقل أو الفكر أو البرهان

وقد حبذ المترجمون العرب ، ترجمة اللفظ اليونانى بإرجاعه إلى الاشتقاق اللغوى ، فدلوا بالمنطق على الكلام أو النطق : ولكن الفلاسفة العرب — لكى يقتربوا من المعنى الثانى لكلمة منطق — ميزوا بين نوعين من النطق : نطق ظاهرى وآخر باطنى ، الأول يشير إلى الكلام أو التحدث ، والثانى يشير إلى المعقولات أو الأفكار ومحاولة إدراكها . يقول الجرجانى « النطق يطلق على الظاهرى وهو التكلم ، وعلى الباطنى وهو إدراك المعقولات . وهذا الفن (المنطق) يقوى الاول ، ويسلك بالثانى مسلك السداد ، فبهذا الفن يتقوى ويظهر كلا معنى النطق للنفس الانسانية المسماة بالناطقة ، فاشتق له اسم النطق » [(١)] .

وقد اشار لاتا وماكبث فى كتابهما عناصر المنطق إلى شىء قريب من هذا ، فقد ذهبا إلى أن المنطق يشير من الناحية الاشتقاقية إلى أنه « علم اللوغوس Science of λόγος ، أى علم اللغة العقلية ، أو الحوار العقلى ، أو علم الكلام المعبر عن الفكر » [(٢)] .

لكن لما كانت اللغة تشير إلى شىء أكبر مما تعبر عنه ، وأن هذا يتضح حينما نميز بين الحدود المنطقية Logical terms وبين الاسماء names ، أو حينما

---

(١) الجرجانى : شروح الشمسية ، ص ١٢٧ ، ١٢٨ .

2. Latte & Macbeath : The elements of Logic. p. 1.

نميز بين القضايا المنطقية Logical propositions وبين العبارات ، فانه يلزم أن نبتعد عن هذا المعنى الاشتقاقى لكى نصل إلى المعنى الاصطلاحى لكلمة المنطق ، وهو أنه علم الفكر ، او العلم الذى يهدف إلى الكشف عن المبادىء العقلية ، التى يقوم عليها تفكيرنا .

نحن لا نعرف على وجه الدقة أول من أستخدم كلمة المنطق ، ولا أول عصر أطلقت فيه ، ولكن برانتل [١] يضع أمامنا أفتراضا مؤداه أنه ربما تكون هذه الكلمة من وضع شراح أرسطو . أما السبب الذى أدى بهؤلاء الشراح إلى وضع هذه الكلمة ، فهو لكى يقابلو بين أوجانون أرسطو وبين كلمة الجدل Dialectic عند الرواقيين. ولقد استعمل كلمة المنطق شيشرون فى كتابه De Finibus ، وأصبحت شائعة فى عصر الاسكندر الأفرويسى وجالينوس فى القرن الميلادى [٢] .

والمنطق هو العلم الذى يبحث فى صحيح الفكر وفاسده ، ، وهو الذى يضع القوانين التى تعصم الذهن من الوقوع فى الخطأ فى الاحكام ؛ فموضوعه هو الفكر الإنسانى من ناحية خاصة ، هى ناحية صحته وفساده ، ويتم له ذلك عن طريق البحث فى القوانين العقلية العامة التى يتبعها العقل الإنسانى فى تفكيره ، فما كان من التفكير موافقا لهذة القوانين كان صحيحا ، وما كان مخالفا لها كان فاسدا ؛ فللمنطق إذن ناحيتان : —

الأول : البحث فى الفكر الإنسانى بقصد الاهتداء إلى قوانينه ، ومعرفة الشروط التى يتوقف عليها الصحيح منه ، وهو من هذه الناحية علم من العلوم ، له موضوع خاص وغرض معين ومنهج محدد .

الثانى : تطبيق هذه القوانين على أنواع الفكر المختلفة لمعرفة الصواب منها

---

(١) برانتل prantl : كتاب تاريخ المنطق فى الغرب س ٥٢٥ ، ٥٢٦ .

1 — Lalande : Vocabulaire technique et critique de la philosphie .

والخطأ . وهو من هذه الناحية فن من الفنون أو صناعة كما يسميه مناطقة العرب.

وإذا كان المنطق علما فهل هو علم نظرى يبحث فى صورة الأحكام وقوانيها؛ أم أنه علم عملى أو معيارى ؟ وإذا كان فنا فهل يرتبط بالمنطق المادى وحده دون المنطق الصورى ؟ هذا هو ما سنحاول الكشف عنه خلال عرضنا لتعريفات المنطق وأقسامه وقوانينه وطبيعته وصلته بالعلوم الإنسانية ، والأبحاث التى ينقسم إليها .

تعريفات المنطق :

لقد تعددت التعريفات حول المنطق ، واختلفت الآراء فيه ومن الصعوبة البالغة تحديد تعريف واحد له. إلا أننا يمكن أن نحصر تعريفات المنطق فى أربعة اتجاهات رئيسية ، أو دمج المتوافق منها فى نوع واحد بحيث نحصل فى النهاية على تعريفات أربعـــة هى* :ـ

١ ـــ عرف بعض الفلاسفة والمناطقة المنطق تعريفا عمليا، فقالوا بأنه آلة أو صناعة . وهم يقصدون بذلك أنه لا يقصد لذاته وإنما لما يمكن أن نستفيد منه عمليا عند تطبيق قواعده وشروطه على الإحكام والاستدلالات الموجودة فى العلوم. ومن هنا فقد وصفوا المنطق بأنه من علوم الوسائل لا من علوم الغايات ، بمعنى أنه وسيلة فقط توصلنا إلى أغراض عملية فى العلوم التى نتدارسها ومن بين هؤلاء ابن سينا الذى عرف المنطق بأنه آله تعصم الذهن من الزلل . يقول ابن سينا « والعلم الذى يطلب ليكون آلة ، قد جرت العادة فى هذا الزمان ، وفى هذه البلدان أن يسمى علم (المنطق) »[١] ويذهب الساوى إلى أن المنطق « قانون صناعى عاصم للذهن عن الزلل، مميزة لصواب الرأى عن الخطأ . . الخ » . كما يرى مناطقة بور رويال Port Royal أن المنطق فن من الفنون ، أو أنه فن التفكير Art of thinking يمارس قوانينه على سائر الأحكام الموجودة فى سائر العلوم .

* أنظر كتاب الدكتور ثابت الفندى عن أصول المنطق الرياضى ص ٣٦ــص ٤٠

(١) ابن سينا : منطق المشرقيين ص ٥ .

ونحن لا نقبل أن يكون المنطق آلة أو فنا أو صناعة ، إذ أن العلوم ، وخصوصا المنطق ، لها أساس نظرى ، ثم قد يأتى التطبيق بعد ذلك أو لا يأتى .

٢ — وهناك فلاسفة ومناطقة آخرون ، عرفوا المنطق بأنه صناعة وعلم نظرى معا وفى نفس الوقت ، منهم جوبلو الذى يقرر « بأن العلوم كلها — بما فيها المنطق — نظرية وتطبيقية معا »(٢) ويرى هوتيلى أن المنطق علم وفن التفكير الصحيح . وواضح أن اجتماع الفكرتين معا ، فكرة صناعة وفكرة علم نظرى يتضمن تناقضا ، لأن العلم النظرى يتجه بأكمله إلى معرفة الحقيقة بغض النظر عن نفعها ، وإنما يجىء التطبيق إن أمكن عند المهندسين والكيميائيين وغيرهم . كما أن هناك الكثير من الحقائق الرياضية مثلا لا يعرف له تطبيقا ، وذلك مثل الأعداد الخيالية التى ظل الرياضيون يتهربون من استعمالها والاستفادة منها زمنا طويلا . ونحن نجد أيضا اكتشافات فى علم الطبيعة لا نجد لها تطبيقا ، وذلك مثلما اكتشف هرتز الموجات الكهرومغناطيسية ، ولما سئل عن فائدتها ، أجاب أنه لا يعلم شيئا عنها إلا أنها موجودة ، ولكن بعد سنوات اتضح أنه يمكن استغلالها فى الرسائل البرقية . وإذن فهناك حقائق علمية بغض النظر عن التطبيق ، ولا يصح فى تصور علم من العلوم أن تجمع بين كونه صناعة وبين كونه علم نظرى فى آن واحد ، فهذا تناقض .

٣ — فلاسفة ومناطقة آخرون ، ذهبوا إلى أن المنطق علم معيارى normative وهم يقصدون بكلمة معيارى أن قوانين المنطق تصبح بالنسبة للفكر كمعايير ثابتة يجب أو ينبغى أن يرق إليها كل تفكير صحيح . ونحن نجد هذه الفكرة عند الغزالى الذى سمى كتابه فى المنطق معيار العلوم ، وسمى كتابه فى الأخلاق ميزان العمل يقول

---

(١) الساوى : البصائر النصرية ١ .

2. Goblot : Traite de logique p. 1

الغزالى إن المنطق هو « القانون الذى يميز صحيح الحد عن غيره ، فيتميز العلم اليقينى عما ليس يقينيا وكأنه الميزان أو المعيار للعلوم كلها »[١] ولعل فونت هو الذى أثار هذه المسألة فى العصر الحديث حين ميز بين العلم النظرى والعلم المعيارى ، وحين ذهب إلى أن المنطق والجمال والأخلاق علوم معيارية ترتبط بقيم ثلاث هى قيم الحق والجمال والخير على التوالى .

وهذه النظرة هى أقل النظرات قبولا لأنها جمعت بين كون المنطق علما وبين كونه معياريا ، وهذا تناقض . يقال أنه لا يوجد علم معيارى ولقد أصبح هذا الرأى شائعا منذ ظهور كتاب ليفى بريل المسمى « علم العادات الأخلاقية » ، وهو كتاب فى الأخلاق ، إلا أنه يمكن أن ينسحب ما فيه على المنطق أيضا ، ذلك لأن الأخلاق كما تصورها الفلاسفة إنما تفرض علينا مثلا عليا أو معايير يجب أن يرقى إليها السلوك الإنسانى ، إذا أريد به أن يكون خلقيا . وهذا ما لم يسمح لها بأن تقوم كعلم طوال تاريخ الأخلاق ، وهى لكى تصبح علماً كغيرها من العلوم الاجتماعية يجب ألا تكون معيارية . ويمكن الإشارة إلى آراء ليفى بريل فى هذا الصدد على النحو التالى : —

قضايا العلم تستمد من الواقع ، وتعبر عما هو كائن ، بصيغة المضارع عادة ، كأن تقول مثلا « الحديد يتمدد بالحرارة » ، « واضع المنطق أرسطو » ، « الأرض تدور حول الشمس » فهذا هو ما يسمى بالأحكام التقريرية Assertion Gudgment ، وإذا كان الأمر كذلك أى إذا كان العلم يعبر عما هو كائن فقط ، فمن التناقض تصور علم بمعنى كلمة العلم هذه تكون قضاياه غير مستمدة من الواقع ، وإنما تعبر عما يجب أن يكون عليه الواقع . وهذا يتأتى بالطبع من صيغة الوجوب كأن تقول مثلا « يجب أن يتمدد الحديد بالحرارة » فمثل هذا الحكم وغيره هو الذى تقوم عليه العلوم المعيارية

---

(١) الغزالى : مقاصد الفلاسفة ص ٣ .

كالأخلاق والجمال والمنطق ، وهى علوم يتصورها الفلاسفة على أنها تفرض علينا واجبات، وتسن معايير يقاس عليها ، هى القواعد أو القوانين الخلقية والجمالية والمنطقية .

إلا أن الأخلاق وغيرها إذا أرادت أن تكون علما بكل معانى الكلمة فلا بد من ابتعادها عن فكرة المعيارية هذه ، أى لا بد أن تكتفى بأن تتقصى الوقائع وتدرس السلوك الإنسانى كما هو حادث فى المجتمعات ، وتستنبط منه القوانين الخلقية وتلزم الناس بها .

هذا النقد الذى وجهه ليفى بريل للتصور المعيارى للأخلاق يمكن أن يوجه للمنطق ، فهو إذا أراد أن يقوم كعلم حقيقى يجب ألا نتصوره معياريا ، ولا معبرا عن أحكام معيارية ، لأنه حينئذ سيصبح متناقضا مع كونه علما .

والواقع أن المنطق فى صورته الحاضرة ، أصبح تماما كالرياضية استنباطا صرفا خاليا من كل إشاره معيارية . ولذلك فان النقد الذى وجهة ليفى بريل للأخلاق يمكن أن ينسحب أيضا على المنطق فلا نعرفه بأن علم معيارى .

٤ — بقى تعريف أخير للمنطق وهو أنه علم نظرى ، وهذا التعريف يعتبر من أنسب التعريفات للمنطق الصورى وللمنطق الرمزى على حد سواء فيذهب جيفونز إلى أن المنطق هو « علم قوانين الفكر » [١] كما يرى كينز أن المنطق « هو العلم الذى يستقصى المبادىء العامة للفكر الصحيح » [٢] ويرى هاملتون أن المنطق « هو علم قوانين الفكر كفكر » [٣] . ويذهب هيجل إلى أن المنطق هو « علم الفكرة المحضة ، وهى محضة لأنهـا تكون فى وسط مجرد من

---

1. Jevons : Elementary Lessons of logic Ch. 1 .
2. Keynes : Formal logic p. 1 .
3. Hamilton : Lectures in logic. firest lecture.

التفكير[1]، كذلك يذهب بوزانكيت Bosanquet إلى أن المنطق «علم صورى وأن العلوم كلها صورية»[2] . كما ذهبت سوزان استبنج إلى أن المنطق هو «علم قوانين الفكر الضرورية»[3]. كذلك عرّف كثير من المناطقة المنطق بأنه علم نظرى أيضا منهم بول Boole وجونسون Johnson وجوزيف Joseph وجون استيوارت مل J. S Mill وولاس وبرادلى وجويكم.

ومن هذه التعريفات كلها يتضح أن المنطق علم نظرى له موضوعه الخاص به، كما أنه ينظر فى صور الفكر لا فى مادته، كما أن لهذا المنطق منهج معين يستخدم فيه الرموز، غرض معين. كما أن المنطق الرمزى، وهو أحد صور التطور للمنطق الصورى، أصبح علما نظريا رياضيا صرفا كالهندسة أو الرياضة.

جـ — أقسام المنطق الصورى

إعتاد المناطقة تقسيم المنطق الصورى إلى ثلاثة أقسام رئيسية، القسم الأول يتناول التصوارات أو الحدود والقسم الثانى يتناول القضايا أو الأحكام والقسم الثالث والأخير يتناول الإستدلالات. وهذا التقسيم الثلاثى منحدر إلينا من أرسطو واضع المنطق الصورى نفسه، فلقد خصص أرسطو لكل قسم كتابا مستقلا، ويقوم هذا التقسيم على تقسيم عملياتنا العقلية كما يقول كينز إلى ثلاثة أقسام **أولا** إدراك الأشياء المفردة وهى وسيلتنا فى معرفة التصورات، **ثانيا** إدراك العلاقات بين كل حدين من تلك الحدود أو التصورات التى أتت إلى ذهننا فى القسم **الأول** ثم

---

1. Wallace . The logic of Hegel. p. 30

2. Bosanquet : Logic or the morphology of Knowledge , Book_I. Ch I . p . 21 .

3. Stebbing : A modern introduction to logic .

ثالثا وأخيرا ، تركيب إستدلالاتنا من القضايا التى توصلنا إليها فى القسم الثانى والتى إعتمدت بدورها عـلى حدود القسم الأول ويقودنا القسم الأول الخاص بالتصورات إلى التعريف، بينما يقودنا القسم الثانى الخاص بالقضايا إلى الاحكام، أما القسم الثالث فيقودنا مباشرة إلى البرهان .

ولقد إنتقل هذا التقسيم الثلاثى برمته إلى الإسلاميين وقبلوه كما هو ، فنرى ابن سينا مثلا يقرر فى النجـاة بأن كل معرفة أو علم فهو تصور أو تصديق وأن التصور هو العلم الأول ويكتسب بالحد (أى بالتعرف) . . . ثم يتحدث ابن سينا عن القياس ولكنه لا يذكر القضايا ولعل هذا راجع إعتباره أن القياس يتضمن القضايا وأن القضايا تتركب من الحدود أو التصورات. كذلك يذهب الساوى فى مقدمة كتابه البصائر النصيرية إلى أن المنطق ينقسم إلى تصور وتصديق ، والتصور هو حصول صورة شىء ما فى الذهن فقط فاذا سمعنا باسم من الأسماء تمثلنا معنى الاسم فى الذهن دون أن يقترن هـذا التمثيل بحكم ، أما التصديق فهو حكم العقل بين تصورين أو حكمين . وإذا تعمقنا فى دراسة تقسيمات المنطق لدى المسلمين فاننا لا نجد هناك أى إستثناء من ذلك التقسيم للمنطق إلى تصور وتصد ، وقد إنتقل هذا التقسيم من العالم الإسلامى إلى العالم الذى يتكلم باللاتينية وظل العالم متعارفا منذ عهد بوتيس Boece (متوفى عام ٥٢٥) على تقسيم المنطق على هذا النحو... تصور وتصديق وانقسام التصديق إلى أحكام واستدلالات، ولكن مناطقة بور رويال أضافوا إلى هذه الأقسام الثلاثة عنصرا ديكارتيا رابعا هو النظام، فأصبح المنطق عندهم منقسما إلى التصور والأحكام والاستدلالات والنظام .

ولقد رفض الكثيرون إدخال فكرة النظام هذه ضمن العمليات المنطقية ، ورفضوا تخصيص قسم خاص لها لأن النظام مفترض فى تصوراتنا واستدلالاتنا

ولا داعي لتخصيص قسم خاص له . ومن هنا فلقد عادت فكرة ثلاثية أقسام المنطق إلى الظهور وقد قبلها بعض المناطقة قبولا وحنضها البعض إلى قسمين فقط بينما لم تكن شاغل البعض الثالث على الإطلاق .

يقول لاتا وماكيث فى كتابها عناصر المنطق The elements of Logic (ص ١٧، ١٨) إن المنطق الصورى قد إنقسم لعصور عديدة إلى ثلاث مذاهب رئيسية : الأول هو مذهب الحدود ، والثانى مذهب القضايا ، والثالث مذهب الاستدلال، ولكن كان هناك دائما خلط وسوء فهم على طبيعة الحدود أو التصورات فحاول المناطقة دراستها وهى مستقلة عن القضايا ، وكذلك حاولوا دراسة القضايا وهى مستقلة عن الإستدلالات ، وذلك ظناً منهم أن التصورات والقضايا والاستدلالات تمثل ثلاثة أنواع مختلفة من عمل الفكر ، فبينما تأتينا الحدود أو ماتعبر عنه هذه الحدود من التصورات عن طريق الإدراك، فان القضايا تأتى عن طريق عملية أخرى نسميها بالحكم نركب فيه حداً إلى حد آخر بينما يشير الاستدلال إلى عملية عقلية ثابتة نمر فيها من قضية معينة إلى قضية أخرى مختلفة لتلك التى أعطيت لنا أولا ، وهذا هو مادعى بعض المناطقة إلى أن يتخيلوا القضايا وهى مستقلة عن الإستدلالات ، وأن يتخيلوا الحدود وهى مستقلة عن القضايا ، أو أن يتخيلوا بأن مايأتى إلى العقل أولا هى الحدود ثم نقوم بتركيب هذه الحدود فى قضايا ثم نقوم بتركيب هذه القضايا فى إستدلالات . ولكن هذا يعد أمراً مضللا كما يرى لاتا وماكيث ومتناقض مع الوصف الحقيق لتفكيرنا ، فنحن لانفكر مطلقاً فى حدود مستقلة أى فى أفكار مبعثرة وفرادى ، فتفكيرنا يشير إلى شىء مترابط ومن هنا فنحن نفكر دائماً فى قضية أو فى حكم . فالحدود تشير دائماً إلى أحكام وقضايا ، كما أن القضايا تشير دائماً إلى استدلالات.

ويرى كينز فى كتابه Studies and exercises in Formal logic (ص٨)
أنه من المعتاد أن نقسم المنطق الصورى إلى ثلاثة أقسام يعالج القسم الأول منها الحدود أو التصورات ، ويعالج القسم الثانى منها القضايا أو الاحكام ، ويعالج القسم الثالث الإستدلالات ، ثم يقرر أن هذا التقسيم هو تقسيم اصطلاحى أو إتفاقى إتفقنا على وضعه على هذا النحو . ويرى كنز أن ثمة اعتراضات كثيرة قد وجهت إلى هذا التقسيم ، وأن بوزانكيت من بين المعترضين على هذا التقسيم لأنه يرى أن المنطق ينقسم إلى قسمين فقط همـا الحكم والإستدلالات ، ويمضى كينز فيقرر أن المنطق إذا كان مهتما بالصدق والكذب فان هذا الصدق وذاك الكذب لا يوجدان إلا فى الحكم وفى الحكم وحده ، ومن هنا فانه يجوز لنا أن نعتبر أن هذا الحكم أو القضية المعبرة عنه الوحدة المنطقية الأساسية ، وعلاوة على ذلك يقول كينز إن التصور لا يمكن أن يكون حالة كاملة فى العقل ، ولكنه يكون كذلك إذا انضم إلى التصورات الأخرى ، وينتهى كينز من مناقشته تلك فيقرر أنه إذا ابتدأ فى كتابه بمناقشة الحدود أو التصورات فانما يكون ذلك من أجل التيسير والترتيب وحسب ثم يدعونا إلى أن نضع فى ذهننا دائماً أن القضية أو الحكم هى الوحدة المنطقية الحقيقية ، وأن الأهمية المنطقية الحدود لا يمكن أن تفهم تماما إلا بالإشارة إلى دورها فى القضايا أو فى الحكم.

كذلك انتقد برادلى فى كتابه مبادىء المنطق The principles of Logic فكرة تقسيم المنطق إلى ثلاثة أقسام ، ففى مقابل التقسيم الثلاثى المألوف للبحث المنطقى إلى تصور وحكم واستدلال يقتصر برادلى على القسمين الأخيرين لأنه يرى أن الحكم لا التصور هو الوحدة الحقيقية للفكر والصورة المنطقية الأولى ، وأن هذا الحكم ذاته متصل بالوعى الكامل . وأننا حينما نحكم إنما نقتطف من هذا الوعى

أو الشعور المتصل جزءاً منه بينما هذا الجزء لا يمكن فصله على الحقيقة من هذا التيار المتصل ، فالإتجاه الكلى إتجاه غالب فى منطق برادلى وميتافيزيقاه . ولقد تأثر برادلى تأثراً واضحاً اعترف به فى مقدمة الطبعة الثانية من كتابه مبادىء المنطق بأفكار بوزانكيت فى المنطق ، وأعلن دينه صراحة للمنطق البوزانكيتى ، فلنتوقف إذن برهة عند هذا الفيلسوف ، لنرى جوهر تفكيره حول هذه النقطة .

إن الحكم هو بداية المنطق عند برزانكيت لا التصور ، لأن أى فكرة أو خطرة حينما تطرأ على الذهن إنما تثير ارتباطات متنوعة وعلاقات متعددة ، بل إن الإسم أى إسم ، يشير إلى دلالات منطقية ، ومن هنا فان المنطق البوزانكيتى لن يبدأ كما بدأ المنطق الصورى بالتصورات ، إن الأحكام فى المنطق البوزانكيتى تفرض ذاتها من أول وهلة ولأول الأمر . والحكم عند بوزانكيت لم يعد هو المحمول الذى نضيفه إلى الموضـــوع . بل على العكس من ذلك فمعنى الحكم عنده معادل للشعور الإنسانى اليقظ فى اهتمامه بالعالم .

ويرى بوزانكيت فى كتابه أسس المنطق The essentials of logic أن الأحكام المنطقية هى بمثابة الأجزاء المنبثقة من الشعور الدائم أو المستمر والتى خرجت من هذا الكل وانفصلت بألفاظ اللغة ، وأن أحكامنا المنطقية كلها ما هى إلا أجزاء أو إطارات نعيها فى لحظة من هذا الحكم النهائى والكلى الذى يشير إلى كل الحقيقة محمولة على ذاتها .

والحكم عند بوزانكيت ليس هو القضية كما ارتأى ذلك كينز ولاتا وماكبث ، فمع أن الوحدة اللغوية التى تقدم لنا الحكم تسمى بالقضية ، فان هذه القضية المنطوقة أو المكتوبة تختلف عن الحكم اختلافاً أساسياً ، فبينما تشير هذه القضية إلى حكم معين نجد أن الحكم يتجاوز ما هو مكتوب أو منطوق . ومن ناحية ثانية يقرر

بوزانكيت فى كتابه المنطق أو مورفولوچيا المعرفة Logic or the morphology of Knowledge أن الحكم لا ينظر إلى الموضوع والمحمول والرابطة على أنها أجزاء منفصلة كما هو الحال بالنسبة إلى القضية ، كما أنه ليس بمثابة علاقة بين الأفكار أو بمثابة الإنتقال من فكرة هى موضوع إلى فكرة هى محمول ، إذ الحكم وحدة لا انفصام فيها ولا انقسام . ومن ناحية ثالثة فإن القضية ترى باعتبارها منقسمة إلى موضوع ومحمول تربطها رابطة أن هناك انتقالا من الموضوع إلى المحمول . أى أن الموضوع يكون لدينا أولا ثم نضيف اليه المحمول بعد ذلك ، وهذا يترتب عليه انتقال زمانى . وبوزانكيت يقرر أن هذا غير موجود بالنسبة إلى الحكم فيذهب فى كتابه السابق إلى أن التحدث عن الانتقال من الموضوع إلى المحمول خاطىء كلية ، فالموضوع لا يكون لدينا أبداً أولا ثم نضيف اليه المحمول ، إن الحكم عملية فكرية لا تأتى عن طريق إضافة قطعة إلى قطعة ، إنها عملية متصلة ومترابطة وفى هذا يقول بوزانكيت أن الحكم الكامل تماما كالعملية التى ينجم عنها حائز بوضوح على الديمومة ، وهذه الديمومة لا تتصل بالحكم وحده ـ الذى رأينا أن من الخطأ أن نقول بسبق زمانى فيه بين الموضوع والمحمول — ولكنها تتصل أيضا بعملية الانتقال من حكم إلى حكم آخر ، إذ لا يجوز لنا أن نقرر بأن هذا الحكم سابق بينما هذا الحكم لاحق ، والنتيجة هى أن الديمومة تسيطر هنا على الحكم وعلى العمليات الفكرية المتصلة بها ، وأنه لا يجوز لنا أن نقول بانفصال أو بتجزئة أو بسبق زمانى إذ أن الحكم يختلف عن القضية فى هذه الأحوال فهو متصل غير منقسم ويمتاز بالديمومة .

وعلى ذلك فالمنطق البوزانكيتى نسقى Systematic وعضوى Oiganic ولقد سار برادلى على هذا المنوال ، كذلك كان هيجل سائراً على نفس الخط الكلى والنسقى والعضوى الذى نجده عند بوزانكيت وبرادلى وجوزيف . ومن هنا نفقد

رفضوا جميعا الإتجاه إلى تقسيم المنطق إلى تصورات وأحكام واستدلالات ، فالمنطق عندهم يسقط التصورات من مباحثه ويقتصر على دراسة الحكم والاستدلال وحسب.

وقد عبر بوزانكيت عن هذا المعنى أحسن تعبير حينما ذهب فى كتابه التضمن والاستدلال التسلسلى Implication and linear inference إلا أنه لابد من النظر إلى المنطق كنسق أى النظر اليه ككل مترابط واحد تتضمن أجزاؤه بعضها بعضا ، وذلك لأنه يمثل الشعور الكلى المتصل والمتحد . وأن العقل يفقد وحدته وحقيقته إذا وضعنا عملياته ومنطقه فى سلسلة تسلسلية لارابط بينها ولا توحيد.

ومع أن لوتز يبدأ منطقه بدراسة مبحث التصورات أو الحدود ذاهبا إلى أن الاحكام يجب أن تفترض على الأقل تصورات بسيطة ، لأن الأحكام تتكون من التصورات ، إلا أن الدراسة العميقة لمنطق لوتز ولميتافيزيقاه ، تبين بوضوح أنه اتبع هــذا الأسلوب لا من ناحية منطقية أو ميتافيزيقية ، ولكن لكى يقدم ترتيبا واضحا لقارئيه ، وهو نفس الأسلوب الذى اتبعه كينز ، فرغم عدم اعتـرافه بأن المنطق يبدأ بالتصورات ، ورغم مناداته بأن الحكم هو الوحـدة المنطقية الاولى ، إلا أنه بدأ كتابه بدراسة التصورات من أجـل تقديم ترتيب واضح لقارئيه. ولقد تنبه بوزانكيت إلى ذلك فقرر تعقيبا على رأى لوتز السابق : أنه من الصعوبة أن نعتقد فى أن كل هذا النقاش يعبر حقيقة عن فكر لوتز ، فقد يكون هذا قد نتج عن شغف لوتز الزائد فى أن يقدم ترتيبا واضحا وكاملا لقارئيه .

أما جوبلو فلقد ذهب فى كتابه Traité de logique إلى أن التصور هو إمكان الحكم بأحكام غير محـدودة ، فالتصور إنسان مثلا لا يشير إلى الإنسان الموجود حاليا فقط وإنما ينطبق على كل من كانوا وكل ما يمكن أن يكونوا ، فهو

إذن يدل على أعـــداد غير محدودة من الاحكام ، ومن هنا فإن التصور ليس فى حقيقته إلا مجموعة من الاحكام المفردة الممكنة ، وعلى هذا فالحكم أسبق من التصور ، بل إن التصور فى صميمه مجموعة من الاحكام الممكنة ، وأنه لاوجود للتصورات إلا فى الاحكام ومن ثم فنقطة البدء فى المنطق هى البحث فى الاحكام لا فى التصورات.

وإذن فلقد ذهب الكثير من المناطقة المحدثين إلى أن التقسيم الارسطى الثلاثى للمنطق لم يعد قائما الآن ، وإنما أصبح المنطق منقسما إلى قسمين فقط هما الأحكام أو القضايا من جهـــة وذلك إذا جاز لنا أن نقول أن القضية مرادفة للحكم ، ثم الاستدلالات من جهة ثانية .

ولعل مشكلة تقسيم المنطق على هـــذا النحو أو ذاك لم تعد شاغل المفكرين والمناطقة المحدثين الذين إهتموا بالمنطق الرياضى، فاذا بحثنا المذاهب المختلفة التى تعرضت لمثل هذا المنطق الرياضى فاننا لن نجد عند أى منهم أى اتجاه لهذا التقسيم أو ذاك . فمذهب التشابه الظاهرى بين الرياضة والمنطق أجهـــد نفسه فى إيجاد المشابهات الظاهرة بين المنطق والرياضة ، وهو قد ذهب إلى أن الصلة بين المنطق والرياضة تقوم فى أن العلمين صوريان وأنهما رمزيان وأنهما ميكانيكيان أو آليان ومن هنا فقد كان كل ما يهم أصحاب هذا المذهب من المنطق هو تلك النواحى التى يتشابه فيها مع الرياضة من حيث كونه صوريا لا ماديا ورمزيا فى متغيراته وثوابته وميكانيكيا فى عملياته تماما كالرياضة ولم يبحثوا إطلاقا فى مسألة تقسيمه .

أما مذهب جبر المنطق الذى أقامه ليبنتز وجورج بول فلقد كان اهتمامه منصبا على المنطق بصورته الجبرية وعلى اعتبار ذلك المنطق الذى نرمز إلى ثوابته ومتغيراته برموز الجبر فرعا من فروع الرياضة وامتدادا لمباحثها وقوانينها .

أما المذهب المضاد لمذهب جبر المنطق وهو المذهب اللوجستيقى الذى ساهم فى

قيامه.فريجة Frege بدقة تحليله المنطق وبيانو Peano بدقة رموزه ووضوحها والذى اتضح فى صورته النهائية على يد رسل Russell فى كتابه Princples of mathematicsوفى كتابه بالاشتراك مع هوايتهد المسمى Principia mathematics فلم يهتم إلا ببيان أن الرياضة فرع من فروع المنطق ، وأن المنطق بقوانينه إنما يبتلع الرياضة بكافة فروعها ، ولم يبحث مسألة التقسيم اطلاقا .

أما دافيد هلبرت إمام الرياضيين فى ألمانيا فلقد أنشأ مذهبا آخر أسماه بالمذهب الاكسيوماتيكى Axiomatic ذهب فيه إلى أن المنطق ليس جزءا من الرياضة ، كما ذهب إلى ذلك أصحاب مذهب جبر المنطق ، كما أن الرياضة ليست جزءا من المنطق كما ذهب إلى ذلك أصحاب المذهب اللوجستيقى ، وإنما يمكن رد المنطق والرياضة معا إلى أصول لا منطقية ولا رياضية وينبثق من هذه الاصول المنطق والرياضة معا ، وهذه الأصول الأكسيوماتيكية لابد أن يتوفر لها شروط منها شرط الأشباع وشرط الاستقلال وشرط عدم التناقض ، ولكن هلبرت لم يشر إطلاقا فى أبحاثه ومذهبه إلى مسألة تقسيم المنطق هذه .

إن ما أهتم به المنطق الرياضى هو فكرة الاستنباط من المسلمات والتعريفات لكل قضايا المنطق ، أو محاولة إقامة نسق إستنباطى نبرهن فيه على كل القضايا ابتداء من مجموعتين من المسلمات والتعريفات . إن المنطق الرياضى هذا أستبعد تماما العمليات السيكولوجية من مباحثه، فهو لم يبحث فيما إذا كان التصور يأتى إلى الذهن أولا بمفرده أم لا ، كما أنه لم يبحث فى ارتباط تصوراتنا سواء أردنا أو لم نرد بأحكامنا بحيث تصبح هذه الأحكام هى البنية المنطقية الأولى ، أنه منطق إلى رمزى صرف . واستنباطى صرف لا يتصل بالمعرفة ولا بكيف نعرف ، وما إذا كانت معارفنا متصلة أو منفصلة . أنه كما قلت منطق آلى لا روح فيه .

من هذا نرى أن تقسيم المنطق الذى بدأ ثلاثيا مر بمرحلة اعتبره فيه المناطقة ثنائيا ، ثم لم يعد النظر فى ثلاثية أقسامه أو ثنائيتها أمرا يثير انتباه مناطقه الرياضة إليه ولا مداد أقلامهم حوله .

د — التصورات والتصديقات :

ونحن إذا غضضنا النظر عن تلك التطورات المثيرة التى تعرضت لها أقسام المنطق،وإذا نظرنا فقط إلىالتقسيم القديم التصل بالمنطق الصورى فىصورته الأولى والذى قلنا أنه ينقسم إلى ثلاثةمباحث أو أنه ينقسم إلىتصور وتصديق،والتصور مرتبط بمبحث التصورات والتصديق متصل بمبحث القضايا أو الحكم وبمبحث الاستدلال فإننا نستطيع ان ننظر فى تقسيم آخر يخضع له التصور كما يخضع له التصديق.فالتصور ينقسم إلى تصور بديهى وإلى تصور نظرى **والبديهى من التصورات** هو الذى ندركه إدراكا مباشرا الاوساطة فيه وذلك بسبب وضوحه البين وعدم احتياجه إلى تعريف نعرفه به أو دليل نقيمه عليه ، أما **النظرى من التصورات** فهو ما لا نجده بينا وواضحا مثل وضوح التصوررات البديهية ، وإنما نحن نتصوره بإعمال الفكر وكده .

كذلك ينقسم التصديق إلى تصديق بديهى وتصديق نظرى **والبديهى من التصديقات** يمثل القضايا والأحكام التىيصدق بها العقل بذاته وغريزته ، ولاتحتاج إلى أكثر من مجرد تصور أجزاء الحكم ، فإذا تصور العقل تلك الأجزاء سارع إلى التصديق بها على الفور، ومن أمثلة تلك القضايا : الكل أكبر من الجزء وأن الأشياء المساوية لشيء آخر متساوية فهذه لا تحتاج إلى عناء فكرى فىتصديقها وإلى جهد أو دليل يبين حقيقتها . **أما النظرى من التصديقات** فهو يمثل القضايا والأحكام التى يحتاج العقل لكى يقبلها أن يقيم الدليل عليها وإلى اعمالفكره فيها.

وثمة تقسيم آخر للأحكام نجده عند جوبلو . فهو يقسم الأحكام إلى أحكام تجريبية ، وإلى أحكام برهانية . أما الأحكام التجريبية فهى تلك الأحكام التى تقوم على المدركات الحسية ، ولكى يكون الحكم التجريبى يقينيا يجب أن يتوافر فيه شرطان فيجب **أولا** : أن يفرض نفسه ضرورة على العقل الذى يحكم ، أى أن يكون تزيها قائما على الأدراك الآتى إلى العقل من الشىء الذى يحكم عليه ، ويجب **ثانيا** أن يفرض نفسه ضرورة على عقل كل شخص خاضع لنفس الظروف ، بمعنى أن يكون صدق الحكم غير مقصور علىّ ، وهنا تتحقق الموضوعية التى لا تتعلق بالذات المفردة المدركة وحدها وإنما تتعلق بكل ذات موضوعة فى نفس الظروف ، فالصدق ليس مرتبطا بى فقط وإنما الصدق صدق بالنسبة إلى الجميع . وتنقسم الأحكام التجريبية إلى ثلاثة أنواع :

١ ـ **أحكام الاختلاف** : وهى تلك الأحكام التى تقرر بأن المحمول مختلف عن الموضوع ، وصورة مثل هذه الأحكام ، هذا ليس ذاك . وأحكام الاختلاف هى أبسط انواع الأحكام التجريبية ، لأنها تقوم على التمييز الذى يقوم بدوره على التفاوت والاختلاف والتباين ، والحكم لا يقوم على التمييز . فبدون هذا التمييز لا نستطيع أن نحكم .

٢ ـ **أحكام الذاتية** : وهى تلك الأحكام التى تقرر بأن المحمول هو هو الموضوع ، وصورة مثل هذه الأحكام ، هذا هو هو ذاك ، أو هذا بعينه ذاك . وأحكام الذاتية عند جوبلو غير مبدأ الذاتية الذى قلنا أن صورته أ هى أ ، ذلك لأن قولى أن سقراط هو سقراط طبقا لمبدأ الذاتية ليس حكما ولا يفيدنى فى أى علم فهو تحصيل حاصل . أما حينما أقول أن أ و ب هما دلالتان مختلفتان لمدلول واحد ، أى حينما أقرر أن هذا الرجل سقراط ، فمعنى هذا أن الرجل الذى

أشير إليه والرجل المعروف باسم سقراط هما رجل واحد بعينه ، فكأن أحكام الذاتية لا يقصد بها الذاتية من كل وجه كما رأينا ذلك ونحن بصدد قانون أو مبدأ الذاتية ، وإنما المقصود بها هو ذاتية من وجوه ، واختلاف من وجوه أخرى ولكن درجة الاختلاف لاتكاد تدرك فالشيئان الذاتيان لا يمكن التمييز بينهما ولكنهما ليسا غير متميزين .

٣ — **أحكام المقارنة** : وهى تلك الأحكام التى تقوم على فكرة الأكبر والأصغر ويعبر عنها فى اللغة باسم التفضيل ، ويجب ألا نخلط بينها وبين أحكام الكم أو المقدار ، لأننا لسنا بصدد العدد ولا المقياس بمعنى أن المقارنة هنا ليست كمية أو عددية .

أما الأحكام البرهانية فتقوم على استنتاج قضية من قضية أخرى ، والأحكام البرهانية لا تستمد من التجربة والإدراك المباشر كما هو الحال فى الأحكام التجريبية ولكنها تستند إلى إقامة الأدلة والوصول من قضية إلى قضية أخرى سواء عن طريق الاستنتاج أو القياس أو الاستنباط . وللأحكام البرهانية نوعان فهى إما أن تكون مستنتجة من أحكام تجريبية ، وهذا ما يسمى بالاستقراء **Induction** ؛ وإما أن تكون مستنتجة من مبادىء عقلية أو قضايا عامة وذلك هو الاستنباط **deduction**

الفصل الثاني

المنطق علم قوانين الفكر

ا — المنطق علـــم

ب — قوانين الفكــر الأساسية .

الفصل الثانى

المنطق علم قوانين الفكر

١ — المنطق علم :

انقسم المنطق القديم، كما سنرى فيما بعد، إلى قسمين : منطق صورى، ومنطق مادى . وهذا التقسيم ذاته يرتبط بالمشكلة المطروحة أمامنا الآن وهى : هل يمكن اعتبار المنطق علما من العلوم التى تهدف إلى الكشف عن الحقيقة لذاتها بغض النظر عن فائدتها العملية ؟ أم أنه مجرد فن من الفنون يهتم بالتطبيقات وبيان المناهج العملية المؤدية إلى المنفعة والفائدة ؟ أم أنه علم وفن فى آن واحد ؟

لقد تباينت ردود المناطقة على هذا السؤال ، فمنهم من ذهب إلى أن المنطق علم يعبر عن مجموعة من النظريات والقوانين والقواعد التى توجد فى الذهن بغض النظر عن التطبيق عليها وعن الفائدة التى يمكن أن تستخرج من هذا التطبيق ، ومنهم من رأى أن المنطق فن أو صناعة يهتم بالتطبيق وبالفائدة وبالعمل . ومنهم من رأى أن المنطق علم وفن معا لأنه يكشف عن الحقائق النظرية ثم يحاول تطبيقها وبعبارة أخرى فإذا كان المنطق صوريا كان علما ، وإذا كان ماديا كان فنا ، وإذا كان صوريا وماديا معا كان علما وفنا .

ولعل أول من أثار هذه المشكلة على هذا النحو هو كاسيودور Cassiodore (المتوفى عام ٥٧٠ م) ولكن جذور المشكلة — مع ذلك — ترجع إلى عدة قرون قبل كاسيودور وتمتد فى التراجع إلى أرسطو نفسه واضع المنطق .

فلقد تعارف شراح أرسطو مثل الإسكندر الأفروديسى وأمونيوس وسمبليقيوس وفيلبون على تقسيم الفلسفه الأرسطية إلى قسمين :

١ — علم نظرى غايته الوصول إلى الحقيقة لذاتها دون نظر إلى أى منفعة عملية .

٢ — علم عملى يستهدف أصلا المنفعة العملية .

ومع ذلك فنحن نجد فى كثير من المؤلفات الأرسطية [1] وفى مواضع متفرقة من هذه المؤلفات أن أرسطو يميز بين ثلاثة مجموعات من العلوم هى : —

١ — العلوم النظرية التى تهدف إلى طلب الحقيقة لذاتها .

٢ — العلوم العملية وغايتها المنفعة .

٣ — العلوم الشعرية التى تتناول الإنتاج الفنى وخصائصه .

وتنقسم العلوم النظرية إلى علوم ثلاثة هى علم الطبيعة ، وعلم الرياضة ، وعلم ما بعد الطبيعة ، كما تنقسم العلوم العملية إلى ثلاثة علوم هى علم السياسة وعلم الأخلاق وعلم تدبير المنزل .

وإذا نظرنا فى التقسيم الأول أو الثانى فإننا لا نجد المنطق بين علوم هذين التقسيمين ، ومن هنا لاحظ المشاؤون الذين أتوا بعد أرسطو أنه لا يوجد مكان للمنطق فى تقسيمه للعلوم ، واستنتجوا أن المنطق ليس جزءاً من الفلسفة ، وليس علماً من علومها . ولذلك اعتبروا المنطق على أنه مقدمة وتوطئة ومدخل للفكر

---

(١) أنظر كتاب الجدل — الكتاب الثالث — الفصل الثالث ف ٥ ؛ أ — وأيضا الكتاب الثامن الفصل الأول ف ١٥٧ أ — كتاب الأخلاق النيقوماخية — الكتاب الثالث الفصل الثانى ف ١٠٢٩ أ — كتاب الميتافيزيقا — الكتاب الأول — الفصل الأول والفصل السابع .

لاغنى عنه أو اعتبروه آلة للعلم أو «أورجانون» أو علما آليا. حقا لقد أطلق أرسطو على المنطق إسم العلم التحليلي، وأطلق عليه ايضا العلم الآلى . ولكن النظر فى تقسيماته تجعلنا نقرر بكل وضوح أن المنطق ليس على الإطلاق جزءا من الفلسفة أو علما من علومها .

* * *

أما الأبيقوريه[1]، فلقد اعتبرت المنطق علما وأسمته العلم القانونى. والفلسفة الأبيقوريه تنقسم إلى ثلاث أقسام رئيسية هى المنطق أو العلم القانونى وعلم الطبيعة وعلم الأخلاق . ولقد ذهب أبيقور إلى أن علم المنطق وعلم الطبيعة خادمان للاخلاق وموجهان لحياة الهدوء والسكينة والسلام، غاية الأخلاق وهدف الفلسفة، والمنطق الأبيقورى يرتبط إرتباطا وثيقا بالمعرفة، ويبحث فى شروط المعرفة الحقة، ويرى أبيقور أن هناك أربعة أنواع للمعرفة هى الإحساس والتصورات والانفعال والحدس الفكرى . والإحساس هو أساس هذا المنطق المادى، والتصورات تكرار للاحساس، والانفعال الذى نحسه بداخلنا يقينى، أما الحدس الفكرى فهو الذى نستطيع الاستدلال بواسطته على وجود مايسميه أبيقور باللامحسوسات (الذرات والخلاء).

(١) الأبيقورية تنسب إلى أبيقور ٣٤١-٢٧٠ ق.م . وترى أن العالم مكون من أعداد لامتناهية من الذرات المادية التى تتحرك فى الخلاء اللامحدود ، وتسقط هذه الذرات الى أسفل بفضل الثقل الذى فيها . كما أن انحرافها أثناء سقوطها يهيىء لها أن تتقابل فتكون الأشياء . والمذهب الأبيقورى يعد صورة متطورة من المذهب الذرى القديم الذى أسسه لوقيبوس وديموقراطس ويختلف عنه فى ادخال أبيقور لفكرتى الثقل والانحراف. لمزيد من الايضاح ارجع لكتاب تاريخ الفكر الفلسفى - أرسطو والمدارس المتأخرة - الدكتور محمد على أبو ريان وكتاب ديموقريطس فيلسوف الذرة وأثره فى الفكر الفلسفى حتى عصورنا الحديثة الدكتور على عبد المعطى وآخرون.

كذلك اعتبرت الرواقية المنطق علما ، إذ تنقسم الفلسفة الرواقية بدورها إلى أقسام ثلاثة هي : علم المنطق ، وعلم الطبيعة ، وعلم الأخلاق . ولقد اعتبر الرواقيون العالم الخارجي بما فيه من جزئيات مادية أساس المعرفة وأساس المنطق . وذهبوا إلى أن المعرفة لابد أن تبدأ من الإدراك الحسى أى من إدراك هذه الجزئيات ، وأن التصورات أو الأفكار التى تأتى إلى النفس عن طريق الإدراك الحسى هى وحدها اليقينية مادام أن مصدرها هو الإحساس .

وهم يتحدثون عن مراتب اليقين ، ويقررون أن أولى درجات المعرفة أو مراتبها هو الأثر الحسى المباشر أو الصورة الحسية ، ثم تعرض هذه الصورة الحسية على النفس فتقبلها أو ترفضها فاذا قبلتها وصلت إلى مرتبة التصديق وهى الدرجة الثانية ، وإذا تيقنت النفس من صوابها فى قبولها للصورة الحسية وصلت إلى مرتبة الفهم الصادق وهى الدرجة الثالثة . وأخيراً تصل النفس إلى مرتبة العلم وهى الدرجة الرابعة ، والعلم الرواقى يقوم على مجموعة مترابطة من الإدراكات الحسية .

ولا يقبل الرواقيون بحث المقولات الأرسطى ، ذلك البحث الذى ذهب إلى أن هناك عشر مقولات ، بل يقررون أن المقولات تتمثل فى مقولة الوجود وما يتفرع عنها من مقولات . وهذه المقولات المتفرعة عن مقولة الوجود أربعة هى : مقولة الجوهر ، والجوهر هنا مادى خالص على عكس مقولة الجوهر الأرسطية المكونة من هيولى وصورة أو صورة وحسب ، ومقولة الصفة وهى تقابل مقولة الكيف عند أرسطو ، والحالة العرضية وتقابل مقولة الجهة عند أرسطو ، والحالة العرضية النسبية وتقابل مقولة الإضافة عند ارسطو .

ولا يقبل الرواقيون أيضا مبحث التصورات ولا مبحث القضايا ولا مبحث القياس الأرسطى ، لاحتواء هذه المباحث على الحدود الكلية . بل نادوا باتجاه جزئى

واسمى مشخص. فكان منطق الرواقيين مخالفا أشد الاختلاف للمنطق الأرسطاطاليسى، وما يهمنا الآن فيما يتعلق بنقطتنا قيد البحث أن المنطق الرواقى أصبح علما من العلوم موضوعه الجزئيات الماديه المشخصة [١].

وحينما انتقل التراث الفلسفى اليونانى إلى العالم الإسلامى، انتقلت مشكلة طبيعة المنطق، وهل هو علم أو فن إليه. وكثرت الآراء حول هذه الطبيعة، فمنهم من عرض للمشكلة كما هى دون تحديد موقف ومنهم الخوارزمى والتهانوى. يقول الخوارزمى « إن بعض الفلاسفة جعل المنطق جزءا ثالثا غير هذين (يقصد الجزء النظرى والجزء العملى) ومنهم من جعله جزءا من أجزاء العلم النظرى، ومنهم من جعله آلة للفلسفة، ومنهم من جعله جزءا منها وآلة لها » [٢] كما يذهب التهانوى إلى شىء قريب من هذا حين يقول « اعلم أنهم اختلفوا فى أن المنطق من العلم أم لا، ومنهم من قرر أن المنطق علم وفن فيذهب الفارابى فى بعض مؤلفاته إلى أن المنطق جزء من الفلسفة أو علم من العلوم ويذهب فى بعض مؤلفاته الأخرى إلى أنه آلة للفلسفة، وبالمثل يذهب اخوان الصفا، فهم تارة يقسمون العلوم الفلسفية إلى أربعة هى الرياضيات والمنطقيات والطبيعيات، والإلهيات، ومن ثم يصبح المنطق علما، وتارة أخرى يقررون أن المنطق هو « آلة أو أداه الفيلسوف » [٣] كذلك يتجه ابن سينا نفس هذا الاتجاه فيقول « والعلم الذى يطلب ليكون آلة، قد جرت العادة فى هذه البلدان أن يسمى (علم المنطق) ولعل له عند قوم آخرين إسماء آخر

---

1. Brochard: Etudes de philosophie ancienne et moderne, P. 37.

(٢) الخوارزمى : مفاتيح العلوم ص ٧٩ .

(٣) التهانوى : كشاف اصطلاحات الفنون ص ٣٨ .

لكننا نؤثر أن نسمية الآن بهذا الاسم المشهور »[1]. ومنهم من قرر أن المنطق فن أو آلة يقول الجرجانى المنطق «آلة قانونية تعصم مراعاتها الذهن من الخطأ فى الفكر ، فهو علم عملى آلى ، كما أن الحكمة علم نظرى غير آلى »[2].

وفى العصور الوسطى المسيحية - يقرر تريكو - انتهى الرأى الا بيقوى والرواقى من أن المنطق يعتبر علما نظريا ، فذهب القديس توما الاكوينى ، ومن سار على نهجه من الفلاسفة المسيحيين المتأثرين بأرسطو إلى أن المنطق فن ؛ بينما جمع القسم الآخر من الفلاسفة المسيحيين الذين تأثروا بأفلاطون أو الأفلاطونية المحدثة أو تأثروا بأفلاطون وأرسطو معا - جمعوا - الفن إلى العلم فاعتبروا المنطق علما وفنا فى نفس الوقت[3].

* * *

وفى العصور الحديثة نجد أرنو Arnauld ونيقول Nicole[4] صاحبي منطق بور رويال يذهبان إلى أن المنطق فن ، ويعنونان كتابهما فى المنطق باسم « المنطق أو فن التفكير Art of Thinking ولقد ذهبا إلى أن فائدة المنطق هى اكتشاف الخطأ فى الحجج المعقدة ، وتوجيهنا إلى التفكير السليم . كذلك اعتبر ديكارت المنطق على انه فن من الفنون ، وكتب كتابين هما « قواعد لهداية العقل » و « مقال عن المنهج لهداية العقل إلى الصواب » يظهر من عنوانهما تحديده للمنطق

---

(١) ابن سينا : منطق المشرقين ص ٥ .

(٢) الجرجانى : التعريفات (مادة منطق) .

3. Tricot : Traité de logique. p. 15

(٤) أرنو : (١٦١٢ – ١٦٩٤) ونيقول (١٦٢٥ – ١٦٥٩) .

باعتباره فنا كذلك سار اسبنيوزا على نفس المنوال ووضع كتابه « إصلاح العقل » الذي اعتبر فيه المنطق كفن من الفنون .

ولقد أراد هوتيلي (١٧٨٧ - ١٨٦٣) أن يضيق شقة الخلاف التى انتابت هذه المشكلة خلال تاريخها الطويل ، فذهب إلى أن الفن يفترض دائما العلم ، مهما كانت درجة هذا الفن، وكذلك فان العلم يفترض دائما الفن،من حيث أن العلم لا بد له من التطبيقات، كما أن هذه التطبيقات يجب أن تكون نابعة عن علم وعن قواعد وقوانين فكرية . ومن ثم فلقد عرّف هويتلي whately المنطق بأنه علم وفن التفكير الصحيح . وهذا هو نفس ما قرره جوبلو بقوله « إن العلوم كلها ، حتى أكثرها نظرية ، قابلة للتطبيق »[1] .

ونحن نلمس فى العصور الحديثة المعاصرة ،عود إلى الرأى الأبيقورى والرواقى القديم ، فنرى طائفة كبيرة من المفكرين والمناطفة يعتبرونه علما ، فيذهب جيفونز إلى القول بأن المنطق هو « علم قوانين الفكر »[2] كما يرى كينز أن المنطق « هو العلم الذى يستقصى المبادىء العامة الفكر الصحيح ، وأن موضوعه هو تفسير مميزات الاحكام . لا باعتبارها ظواهر سيكولوجية وإنما باعتبارها معبرة عن معارفنا ومعتقداتنا. ويتجه المنطق على وجه خاص نحو تحديد الشروط التى ننتقل بفضلها من أحكام معروفة لنا إلى أحكام أخرى نستنبطها من الأولى[3]. كما يذهب لاتا وما كبث أن المنطق « هو علم اللوغوس ، أى علم اللغة المتمنطقة ، اللغة التى تعبر عن الفكر »[4]. ويرى ولتون أن المنطق هو « العلم الذى يحلل

1. Goblot : Traité de logique. p. 1
2. Jevons : Elementary lessons of logic. ch I.
3. Keynes : Formal logic. p. I.
4. Latta & Macbeath : The elements of logic. p. I.

العلاقات الموجودة بين المقدمات والنتائج فى كل العلوم »[١]. ويدير هاملتون فى نفس الاتجاه فيقرر أن المنطق هو « علم قوانين الفكر كفكر » [٢].

والمنطق عند هيجل علم أيضا « هو « علم الفكرة المحضة » وهى محضة لأنها تكون فى وسط مجرد من التفكير [٣] أما بغيته أو منتهاه فهى الفكرة المطلقة » والفكرة المطلقة هذه هى « الفكرة التى تتحد فيها الفكرة الذاتية بالفكرة الموضوعية[٤] أما موضوع المنطق فهو الحقيقة التى تنبثق أساسا عن التفكير. يقول هيجل « الحقيقة هى موضوع المنطق ، والبحث عنها يوقظ كل حماسنا [٥] ثم يقرر بعد ذلك أن الحقيقة مساوية للتفكير أو الفكر فيقول « إن الفكر هو موضوع المنطق » [٦].

ويقوم المنطق الهيجلى على الجدل . والجدل هنا ليس فنا قائما على براعة المجادل كما كان الأمر عند الأغريق. وانما هو حوار العقل الخالص مع ذاته » يناقش فيه محتوياته » ويقيم به وبواسطته العلاقات بين هذه المحتويات . فهو إذن كما يقول هيجل (مبدأ كل الحركات والنشاطات التى نجدها فى الواقع) [٧]. ويتكون الجدل الهيجلى من الفكرة Thesis والنقيض Antithesis والمركب منهما Synthesis [٨]

---

1. Welton : Intermediate logic. p . 12 .
2. Hamilton : Lectures in logic. Firest lecture .
3. Wallace : The logic of Hegel. p. 30.
4. Russell; B : A history of western philosophy . ch. xxii. p. 759 .
5. Ibid : p. 31 .
6. Ibid : p. 33 .
7. Findlay ; J.N. : Hegel A re-examimation. ch. iii p. 65.
8. Russell ; B . : A history of western philosophy. xxii p. 759 .

ومع ذلك يجب أن نحترس هنا من فكرة أن الجدل ماهو إلا لمنطق . إذ أننا نجد الجـــدل ونلتق به فى البناء الهيجلى كله ، وفى نسقه الفلسفى برمته . لكنه يتسم فى كل فرع من فروع ذلك البناء وهذا النسق بطبيعة نوعية خاصة ، فهو فى فلسفة الطبيعة مثلا موجود ، ولكنه يتسم بطبيعة نوعيـــة خاصة تخالف الطبيعة النوعيـــة الخاصة التى نجده بها فى فلسفة الدين مثلا أو فى فلسفة التاريخ وهكذا .

والمنطق الهيجلى ينقسم إلى ثلاثة مذاهب: الأول هو مذهب الوجود ، والثانى هو مذهب الماهية ، والثالث هو مذهب الفكرة الشاملة . وهذا التقسيم الثلاثى يشبه المثلث الذى يمثل الضلع الأول فيه الوجود ، بينما يمثل الضلع الثانى فيه الماهية ، ويمثل الضلع الثالث أخيراً مذهب الفكرة الشاملة .

كذلك رأى بوزانكيت أن المنطق « علم صورى ، وأن العلوم كلها صورية ، من حيث أنها تقوم على تعقب الخصائص الكلية للأشياء أى البناء الذى يجعلها ما تكون عليه . إلا أن هذه العلوم تختلف فى درجة الصورية » [1] على نحو ما بينا ونحن بصدد دارسة اقسام المنطق . وبوزانكيت يقيم المنطق أيضا على الجدل ، ويربطه بالمنطق كما فعل ذلك هيجل .

ولقد سار على نفس المنوال برادلى الذى ذهب فى كتابه مبادىء المنطق عام ١٨٨٣ إلى أن المنطق علم يبدأ بالحكم ، فالحكم لا التصور هى الوحدة الأصلية للفكر ، والمعنى عنده أو الفكرة المنطقية تظل على ما هى عليه مهما تغيرت المعطيات وهى ذلك الجزء من مضمون الشعور الذى أوقفه الذهن وأخرجه بالتالى من مجال الزمان . ومع ذلك فبرادلى يقصى علم النفس من مجال المنطق ، وهو يعرف الحكم

3. Bosanquet; B : Logic or the morphology of Knowledge. Book 1. ch 1. p 21.

بأنه هو « الفعل الذى يحيل مضمونا فكريا إلى واقع متجاوز لذلك الفعل »[١].

كما قامت سوزان إستبنج ، بعمل مؤلف أسمته « مقدمة حديثة فى المنطق » وفقت فيه بين المنطق الصورى وبين المنطق الرمزى ، بل وردت المنطق الأخير إلى المنطق الصورى القديم، ورأت أن المنطق الحديث ما هو إلا تعديل أو تطوير أو إصلاح للنطق القديم . ولقد ذهبت فيما يتعلق بنقطتنا قيد البحث إلى أن المنطق علم قوانين الفكر الضرورية[٢] .

وفى نفس هذا الاتجـــاه سار بول[٣] وجونسون[٤] وجـــوزيف[٥] وجـــون استيوارت مل[٦] ، وإدوارد كيرد[٧] وجون كيرد[٨] وولاس[٩] وجونس[١٠] وموير هيد[١١] . ودولدين[١٢]

1. Bradley; F. H. : Principles of Logic Book II. part II. p. 286.
2. Stebbing. S. : Amodern Intreduction to logic ch. xxiv. p. 2.
3. Boole : The laws of th ght.
4. Johnson; w. E. : Logic. Vol. 1.
5. Joseph; H. W. B. : An Introduction to logic p. 13.
6. Mill; J. S. : Asystem of logic. Book II ch 7.

(٧) ادارد كيرد هيجلى انجليزى (١٨٣٥–١٩٠٨) نشر الحركة المثالية فى جلاسجو.

(٨) جون كيرد ، هيجلى انجليزى (١٨٢٠ – ١٨٩٨) أدخل منطق وفلسفة هيجل فى كتابه ·

(٩) وليام ولاس ، كتب عن منطق هيجل ، وترجم معظم مؤلفاته (١٨٤٤–١٨٩٧)

(١٠) هنرى جونس ، مثالى هيجلى متحمس لهيجل (١٨٥٢ — ١٩٢٢) .

(١١) جون هنرى مويرهيد (١٨٥٥–١٩٤٠) تمسك بالحركة المثالية فى انجلترا وسار فيها بكل اندفاع وحماسة ومرونة واخلاص .

(١٢) هولدين (١٨٥٦–٩٢٨) أهم مؤلفاته كتابه (الطريق إلى الحقيقة) التى يعترف فيه بأن كتاباته كلها قد اقتبسها من هيجل .

وبيلى [١] وسمث [٢] وجويكم [٣] .

ولقد زاد فنت (١٨٣٢ — ١٩٢٠) المسألة تعقيدا حين تساءل . إذا كان المنطق علما فهل هو علم نظرى أو علم معيارى ! فأخذ على عاتقه تقسيم العلوم إلى نظرية ومعيارية ، والعلوم المعيارية عنده هى المنطق والجمال والأخلاق ، وترتبط بقيم ثلاث ؛ فالمنطق يرتبط بقيمة الحق ، وعلم الجمال يرتبط بقيمة الجمال ، وعلم الأخلاق يرتبط بقيمة الخير. وبينما نجد الأحكام فى العلوم النظرية أحكاما واقعية ، نجد الأحكام قيمية فى العلوم المعيارية . يقول موى « يتميز العلم المعيارى عن العلم المألوف بأنه يتكون من أحكام قيم ؛ وأنه يصل إلى هدفه دون أن يستمد أسباب ترجيحاته أو أحكامه من شىء سوى الموضوع نفسه . . . فالمعيار شىء أصيل فى العلم المعيارى ؛ وهو الذى يكوّن موضوعه الخاص » [٤]

ومن ثم ينتج أن المنطق علم معيارى، يرتبط بقيمة الحق وموضوعه الأحكام القيمية ؛ إلا أن ليفى بريل ذهب فى كتابه « الأخلاق أو علم العادات الأخلاقية » إلى أنه من التناقض أن يتحدث الإنسان عن « علم » معيارى ، لأن العلم هو علم بالواقع ومرتبط بالأحكام الواقعية ؛ ولا نستطيع أن نستنتج ما يجب أن يكون مما

(١) جيمس بلاك بيلى ، (١٨٧٢ — ١٩٤٠) ربط باسم هيجل .

(٢) جون الكسندر سميث ، (١٨٦٣ — ١٩٣٩) تأثر بهيجل عن طريق براطى وبوزانكيت .

(٣) هارولد هنرى جويكم ، من فلاسفة المثالية المطلقة ، آمن بمذهب المطلق (١٨٦٨ — ١٩٣٨)

(٤) موى : المنطق وفلسفة العلوم ، ترجمة فؤاد زكريا الجزء الأول ص ٢٤ .

هو كائن . وينتهى . ليفى بريل إلى أن ثمة تناقض بين فكرة العلم وبين فكرة المعيارية (١) .

* * *

وينتهى المطاف بنا إلى القول بأن المنطق ليس فنا ، وليس فنا وعلما وليس علما معياريا، وإنما هو علم نظرى ، هو علم التفكير الصحيح ، فذلك هو ما أنتهت إليه الدراسات المعاصرة حول طبيعة المنطق .

ب - قوانين الفكر الاساسية :

لما كان المنطق هو علم قوانين الفكر، أو العلم الذى يحاول الكشف عن المبادئ التى يسير عليها الفكر الإنسانى ، فانه يلزم أن تتناول هذه القوانين بالدراسة .

ولعل الفيلسوف اليونانى هراقليطس صاحب مذهب التغير والصيرورة، والذى ذهب إلى أن الشيء يحوى ضده فى نفس الوقت ، وأن التناقض هو سمة الحياة والوجود ، وأن الإنسان لا يستطيع أن ينزل إلى البحر مرتين ، هو الذى اضطر بارمنيدس إلى المناداة بالثبات والذاتية واضطر أرسطو أن يضع للفكر قوانينا عامة يسير بمقتضاها وجعلها قوانينا أولية سابقة على كل تفكير، بمعنى أن العقل وجدوهى فيه . وقد حصر أرسطو هذه القوانين فى ثلاث، ولكن ليبنتز ذلك الفيلسوف الألمانى المحدث أضاف إليها قانونا رابعا هو قانون السبب الكافى . أما القوانين الثلاثة فهى :

١ — قانون الذاتية Law of Identity ويعبر عنه بأن أ هى أ ، أو أن كل

(١) ارجع الى تعريفات المنطق * حيث ترى رأى ليفى بريل بالتفصيل حول هذه النقطة .

ما هو هو، أو أن كل ما هو هو ذات ما هو . فحقيقة الشيء لا تتغير وتتبدل كما ذهب إلى ذلك هيرقليطس والسوفسطائيين، ولكنها ثابتة كما قرر ذلك بارمنيدس. وقد عرف المسلمون هذا القانون تحت اسم قانون الهوية أو قانون الهوهو. وتصور الذاتية يتضمن تصور الاختلاف ، فنحن حينما نقول أن أهى أ إنما نعنى فى نفس الوقت أن أ لا يمكن أن تكون لا أ ومثال ذلك إننى حينما أقول سقراط هو سقراط فإننى أعنى فى نفس الوقت أن سقراط لا يمكن أن يكون غير سقراط ، كأن يكون طائرا مثلا أو جماداً أو نباتاً . الخ، وعلى هذا لا يكون لقانون الذاتية معنى بدون هذا التمايز أو الاختلاف أو التباين . ونحن فى المنطق نلتزم بهذا القانون ونطالب دائما أن يكون نفس الحد له نفس المعنى فى نفس الموضوع الذى نناقشه، كما يقول واتون .

يقول لاتا وماكبث فى كتابهما عناصر المنطق [1] لقد رأى أفلاطون وأرسطو أن الشيء يحتفظ بذاتيته رغم الاختلافات التى قد تطرأ عليه. فهذا الإنسان أو ذاك وليكن سقراط مثلا تعرض له تغيرات كثيرة ،فهو يضحك أحيانا ويلعب ويتفلسف ويمشى وقد تنكسر ساقه أو تبتر ذراعه ومع ذلك يظل سقراط هو هو ، رغم كل هذه التغيرات التى تطرأ عليه .

وهـــذه التغيرات هى التى تسمح لنا كما يقول لاتا وماكبث بأن تحمل على موضوع ما عدة محمولات يكون الموضوع فيها ثابتا والمحمولات متغيرة .

أما برادلى فقد عبر عن هذا القانون بقوله بأن ما هو حقيق هو حقيق دائما وما هو كاذب هو كاذب دائما ، وأنه ليست هناك أية ظروف أو ملابسات يمكن أن

---

1. Latta & Macbeath The Elements of logic . P. 107 .

تقلب ما هو حقيق إلى ما هو كاذب»[١]، أما جون ستيوارت مل فقدعبر عن هذا القانون بقوله «إن ما هو حقيق فى صورة ما يكون حقيقيا — فى كل الصور الأخرى التى تحمل نفس المعنى» [٢].

ويذهب كينز فى كتابه المنطق الصورى إلى «أننا نعنى بالذاتية ، ذلك القانون الذى يؤكد ذاتية الموضوع وليست ذاتية الكيفيات أو المحمولات» [٣]

٢ ـ قانون عدم التناقض Law of non-contradiction ويعبر عنه بأن أ لايمكن أن يكون أ ولا أ فى نفس الوقت،وهذا القانون يكمل القانون الأول، أو هو تعبير عن القانون الأول فى صورة سلبية، فنحن حينما نقرر فى قانون الذاتية بأن أ هى أ فإننا ننفى فى نفس الوقت أن تكون أ لا أ . وقد عبر أرسطو عن هذا القانون بقوله «من الممتنع حمل صفة وعدم حملها على موضوع واحد فى نفس الوقت وبنفس المعنى» . ثم حدد المدرسيون هذا القانون بأنه إثبات ونفى صفة معينة لشيء معين فى نفس الوقت ، كأن تقول سقراط طويل وقصير أو أرسطو بدين ونحيف وأن الحديد معدن وغير معدن . وقد عبر موى عن هذا القانون بقوله إن الحقيقة لاتتناقض ولكنها تعبر عن وحدة متناسقة فى الفكر لا تتحول إلى التناقض .

وقد عبر مل عن هذا القانون بطريقة سلبية فذهب إلى أننا إذا اثبتنا لشيء

---

1. Bradely : Principles of logic . P . 133 .

2. Mill; j. S. : Examination of sir william Hamilton's. philosophy . P . 466 .

3. Keynes : Formal logic P. 454.

صفة معينة وكانت صادقة، فإننا إذا أثبتنا نقيضها إلى نفس الشيء في نفس الوقت فإننا نقع في التناقض .

ويعتبر بوزانكيت هذا القانون أساسا المنطق والمعرفة والفلسفة برمتها ، كذلك اعتبره هيجل وجميع الفلاسفة المثاليين الذين ساروا على منوالها ونادوا بالمنطق الحركي أو الجدلي أو الديالكتيكي .

ويرى ولتون أن قانون التناقض يشير إلى «أن نفس الشيء لا يمكن أن يحتوى ولا يحتوى على نفس الصفة في نفس الوقت[1]». وقد عرف المسلمون هذا القانون فقالوا إن « النقيضان لا يجتمعان معا » .

٣ ـ قانون الثالث المرفوع Law of Excluded Middle Term ويعبر عنه بأن أ إما أن تكون أ أو لا أ ولا وسط بين ذلك . وهو بذلك يمثل الصورة النهائية لهذه القوانين فهو ينفى نفيا قاطعا وجود وسط بين الإثبات والنفى فالحكم إما أن يكون صادقا أو كاذبا ولا يمكن ان يكون شيئا وراء ذلك . وقد عبر أرسطو عن هذا القانون بقوله بأن لا وسط بين النقيضين، أما المسلمون فقد عبروا عن هذا القانون بقولهم « إن النقيضان لا يجتمعان ولا يرتفعان معا » .

يقول لاتا وماكبث أن قانون الثالث المرفوع يقرر بأن «النقيضان لا يمكن أن يكونا كاذبان معا بل يلزم أن يكون أحدهما صادقا والآخر كاذبا كما لا يمكن أن يكونا صادقان معا بنفس المعنى»[2] ويرى ولتون «أن هذا القانون يجعلنا نجد

---

1. Welton : Intermediate logic. p. 15.

2. latta & Macbteh : The elements of logic. p. 110.

فكرنا فلا نقبل أن نحكم على القضية إلا فى حدود قيمة الصدق أو قيمة الكذب ولا شىء أكثر من هذا »[1].

هذه هى قوانين الفكر الأساسية التى وضعها لنا أرسطو. ولكن الفيلسوف ليبنتز أشار إلى قانون رابع أسماه قانون السبب الكافى **Law of sufficient reason** والذى يقرر بأن كل ما هو موجود أو كل ما يمكن أن يوجد يكون له علة توضح لماذا كان على هذا النحو دون أن يكون على أى نحو آخر .

ولنا على هذه القوانين الملاحظات التالية :—

١ - أن هذه القوانين متصلة ومترابطة ، فالقانون الأول يقرر أن الحقيقة هى هى ، أما القانون الثانى فقد قلنا أنه يثبت الحقيقة من ناحية سلبية ، بيقرر أن هذه الحقيقة لا يمكن أن تكون هى ولا هى فى نفس الوقت، والقانون الثالث هو بمثابة الصورة الشرطية للقانون الثانى فيقرر أن الحقيقة إما أن تكون هى هى ، وإما ألا تكون كذلك ولا شىء أكثر من هذا .

٢ - يمكن رد قانون عدم التناقض والثالث المرفوع إلى قانون الذاتية، لأننا إذا قلنا أن أ هى أ فإننا نعنى أن أ هذه لا يمكن أن تكون لا أ ، كما نعنى فى نفس الوقت أن أ هذه إما أن تكون أ وإما أن تكون لا أ .وإذن فالقوانين الثلاثة يمكن ردها إلى قانون الذاتية .

٣ - هناك أساس عقلى وهناك أساس نفسى وأساس انطولوجى لهذه القوانين. الأساس العقلى يجعل فكرنا لا يقبل أى أحكام متناقضة ، والأساس النفسى يجعل النفس لا تستطيع أن تثبت قضيتين متناقضتين ، فالحكم المتناقض هو بمثابة عدم

---

1. Welton : Intermebiate logic p. 16·

النفس . والأساس الأنطولوجى أو الوجودى يجعلنا نقبل الذاتية فى الأشياء وإلا لما كانت موجودة على الحقيقة .

٤ ـ هذه القوانين بديهية نقبلها قبولا دون أن نطلب البرهنة عليها أو إقامة الدليل على صحتها ، فهى بديهية وفطرية ، وليست مستمدة من الخارج على عكس وجهة نظر الاجتماعيين الذين يقررون أن هذه القوانين مستمدة من المجتمع ومكتسبة من الخارج .

٥ ـ هذة القوانين هى أساس المنطق ، كالعقل الإنسانى لا يستطيع أن يتقدم خطوة فى البرهنة والاستدلال دون أن يستند إليها ، فالقياس الأرسطى سيقوم عليها كما يقوم عليها الاستدلال والمنطق برمته حتى فى صورته الحديثة المتطورة.

الفصل الثالث

الانتقال من المنطق الصورى إلى المنطق الرياضى

أ ـ المنطق الصورى والمنطق المادى.

ب ـ المنهج الاستقرائى والمنهج الاستدلالى الرياضى

جـ ـ خطوات نحو المنطق الرياضى :

١ ـ أرسطو　　　٢ ـ الرواقيون

٣ ـ ديكارت　　　٤ ـ ليبنتز

٥ ـ هاملتون　　　٦ ـ دى مورجان

٧ ـ جورج بول　　　٨ ـ بيانو

٩ ـ فريجة

الفصل الثالث

الإنتقال من المنطق الصورى إلى المنطق الرياضى

ا ـ المنطق الصورى والمنطق المادى :

ينقسم المنطق إلى قسمين رئيسيين ؛ منطق صورى ، ومنطق مادى . يقول جونسون « إن المنطق يحاول تحليل ونقد الفكر ، وهذا التحليل قد يتعلق بالفكر نفسه أو بمبادئه وصوره ، وقد يتعلق بمضمون الفكر أو بمحتواه » [1] ويقول كينز « إن واحدا من الأسئلة الهامة المتصلة بالمنطق يتعلق بصورية المنطق وماديته . . هل المنطق صورى أم مادى ؟ ذاتى أم موضوعى ؟ يتعلق بالفكر وتناسقه الذاتى أم يتعلق بالأشياء ؟ . ويقرر أنه من المعتاد أن نقول أن المنطق صورى يهتم فقط بصور الفكر أى بطريقتنا فى التفكير المبتعدة عن الموضوعات المشخصة التى نفكر فيها ، كما أنه من المعتاد أيضا أن نقول أن المنطق مادى من حيث أنه يشير إلى الموضوعات المختلفة التى نفكر فيها ؛ ثم يقرر كينز ـ أن المنطق صورى من جهة ، ذلك أنه لا يتناول وقائع مادية . كما أن الاستدلال فيه يكون له نمط معين أو صورة محددة ، كما أن الموضوعات الرئيسية فى المنطق هو محاولة الكشف عن أكثر الأنماط أو الصور دقة والتى يمكن رد كل الاستدلالات إليها ـ ثم يعود كينز ـ ويبين أن المنطق مادى من حيث أنه يشبع فضولنا بواسطة ملأ هذه الصور المنطقية بمادة موضوعية مستمدة من العالم الخارجى ـ ويخلص كينز ـ إلى أن المنطق صورى ومادى فى الآن عينه » [2] .

---

1 — Johnson : Logic. vol. I

2 — Keynes : Formal logic . p. p. 2 — 3,

ويرى لاتا وماكبث «أن الفكر يرتبط دائما بموضوع ، وأنه يكون متصلا باستمرار بموضوعاته ، وأنه لا يوجد فكر مجرد بالكلية » (١) ومن هنا فالفكر ليس منفصلا عن الموضوعات أو إطارا مستقلا عنه، رغم أننا قد نستطيع أن نميز بين الفكر وبين موضوعاته ، فني الطبيعيات نحن نفكر في المادة والطاقة ، وفي البيولوجيا نفكر في الحياة ، وفي علم النفس نفكر في العمليات العقلية والنفسية الداخلية ، وفكرنا يختلف من علم لآخر منهجا وإطاراً بحسب اختلاف موضوعات هذه العلوم . ونفس الأمر ينطبق على المنطق، فهو يبحث في الصور الفكرية الملائمة لموضوعاته. . . يقول جيفونز «إن الصورة هي تلك التي تبقى وتدوم بينما تتغير وتتبدل المادة التي تملأ بها » (٢) وصور الفكر هي طريقته في التفكير بالنسبة إلى موضوعاته ، أما مادة الفكر فهي الموضوعات المختلفة التي نفكر فيها .

ولقد سمى مناطقه بور رويال المنطق بأنه فن التفكير The art of thinking ويرى لاتا وماكبث خطأ تلك التسمية ، ومع ذلك يقرران بأن للمنطق فائدة عملية ، ذلك أنهما رأيا أن المنطق لا يعلمنا كيف نفكر ، كما أنه ليس آلة نكتشف بها الحقيقة ، فنحن نستطيع أن نفكر جيداً بدون دراسة للمنطق ، كما أننا نستطيع أن نكتشف الحقيقة عن طريق الملاحظة والتجربة وليس عن طريق المنطق . ومع هذا فإن المنطق يمدنا باليقين وبالدقة وبالوضوح ، ويساعدنا على بيان المغالطات ونقـاط الضعف في تفكيرنا واستدلالاتنا ، ويوجهنـا إلى طلب البرهنـة الصحيحة الصادقة .

وبديهي أن تلك النواحي العملية ذات النفع إنما تعود بنـا إلى ما سبق أن

1 — Latta & Macbeath : The elements of logic. p. 6 .

2 — Jevons : Elementary lessens in logis. p. 5

قررناه ، وهو أن المنطق يتصل بالواقـــع المادى اتصاله بالصورة فهو صورى ومادى معا .

والواقع ، أن كل العلوم — وليس المنطق وحده — تبحث عن الصورة الخاصة بالظواهر المكونة لموضوعاتها ، تلك الصورة التى تبقى ثابتة رغم تغـــير ظواهرها ، (١) وهنا نستطيع أن نفهم معنى قول كينز ، بأن العلوم كلها صورية من حيث أنها تجرد الصور من الموضوعات . . . وأن المنطق هو أكثر هذه العلوم تجريدا وتعميما وصورية ، (٢) ومعنى هذا أن كل العلوم تتصف بهاتين الصفتين : الصورية والمادية ، وأن العلوم لا تختلف بين بعضها البعض إلا فى درجة الصورية ، وبعضها أكثر صورية من الآخر .

ولعل هذا هو ما عبر عنه بوزانكيت حين ذهب إلى أن المادة لا توجد بدون صورة ، وأن العلوم تتجه بأكلها إلى البحث عن تلك الصورة التى قلنا أنها ترتبط بالمادة ، ويخلص بوزانكيت إلى أن كل العلوم صورية وان المنطق علم صورى وأن الهندسة علم صورى وحتى الفيزيقيات علوم صورية ، فكل العلوم صورية ، لأنها تتعقب الخصائص والصور الكلية للأشياء .

إلا أن العلوم عند بوزانكيت تختلف فى درجة الصورية ، فكل علم يعالج نوعا من الكيفيات التى تكون بمثابة صوره ، ولكن صور هذه العلوم تكون مادة بالنسبة إلى المنطق ، ومن ثم يجوز لنا أن نقرر ، بأن المنطق أعلى العـــلوم صورية ، (٣) .

---

1. Latta & Macbeath : The elements of logic p. 7

2. Keynes : Formal logic p. 3.

3. Bosanquet ; B : Logic or the morphology of Knolwedge, introduction. p. 9.

ويبدو أن جيفونز ، — يقول بوزانكيت — قد أخطأ خطأ كبيرا فى هذه النقطة ، فهو يرتب على النتيجة السابقه وهى أن صور جميع العلوم تكون ماده بالنسبة إلى المنطق نتيجة خاطئة تجعل المنطق علم العلوم تعود إليه العلوم برمتها و تعلن ولاءها له . ومن ثم ذهب جيفونز إلى أن العلوم جميعا تنتهى بالمقطع Logy وأن هذا المقطع مأخوذ من الكلمة Logic . وعلى ذلك النحو يصبح الـ Geo'ogy هو المنطق الذى يفسر تكوين القشرة الأرضية، ويصبح الـ Biology هو المنطق المطبق على ظاهره الحياة ، ونفس الشىء ينطبق على الـ Anthropology و Physiology و psychology و Zoology وغيرها من العلوم ؛ فكل علم من هذه العلوم - يقول جيفونز - « إنما يعترف بوضوح بأنه منطق خاص ، مادمنا نجد أن إسمه يضم إليه المقطع Logy » [٢] .

ونرى بوزانكيت أن هذا التفسير الذى يربط بين اسم المنطق وبين نهايات أسماء العلوم ، إنما هو تفسير خاطىء تماما، ذلك لأن المصطلح Logic لا يتوافق مع المقطع Logy فى كلمة مثل Zoology ولكنه يتوافق مع المقطع Zoo الذى يشير إلى نطاق أو مجال علم معين لا إلى خاصيته كعلم. وبالمثل فإن عبارة علم العلوم لا تعنى أن المنطق هو العلم الذى يشتمل على العلوم المتخصصة ، وإنمـــا تعنى أن المنطق هو العلم الذى يعالج العلاقات والصور العامة التى تكون مشتركة فى كل العلوم من حيث هى كذلك ، ولكنه يحذف المادة منها وليس الصورة ، أى يحذف المستوى الخاص بالتفاصيل التى يتناولها كل علم على حدة من وجهة نظره الخاصة .

وينتهى بوزانكيت من نقده لجيفونز إلى أن كل علم من العلوم له مادته وصورته فمادة علم النبات هو النبات ، طبيعته ونشأته وتطوره ، ولكن العالم بعد دراسته

[٢] Jevens : Elementary lessons in logic. p. 6.

وأبحاثه وافتراضاته يكشف علاقات وكيفيات تكون بمثابة صورة المعرفة فى هذا العلم . وهذه الصورة تكون بمثابة مادة بالنسبة إلى المنطق .

ومن هذا يلاحظ أن المنطق يصب اهتمامه على العمليات العقلية المجردة العليا ، وأن مادته تكون بمثابة صور العلوم المختلفة التى تكوّن البناء المعرفى الكلى . فهو إذن فى أعلى درجة من درجات الصورية ، الأمر الذى يجعلنا نقرر بأن الجانب الصورى فيه يطغى على الجانب المادى .

وإذا ما عدنا إلى واضع المنطق نفسه نستطلعه رأيه ، لظهر لنا أن أرسطو قد نظر هذه النظره المزدوجة إلى المنطق ، فالمنطق عنده صورى ومادى معا ، مع أنه غلب ـ خصوصا فى تحليلاته الأولى ـ الناحية الأولى على الثانية .

لقد نظر أرسطو إلى التصورات على أنها متسلسلة فى الذهن بطريقة معينة ، تخضع لقواعد عامة يسير عليها العقل ، وهو يربط بين هذه التصورات بغض النظر عما تشير إليه هذه التصورات من واقع خارجى خاضع للتجربة ، فهذه التصورات تترابط أولا مكونة القضايا الحملية منها والشرطية ، والقضايا الحملية لها صورة محددة هى صورة الموضوع ـ المحمول ، كما أن القضايا الشرطية تنقسم إلى قضايا شرطية متصلة وأخرى منفصلة ، ولكل من هذين النوعين صورته وقواعده العقلية العامة . وإذا ما انتقلنا إلى ربط هذه القضايا فإننا نجد أنفسنا أمام القياس الأرسطى ، وهو بدوره له شروطه وقواعده وصوره ، وله قالب يصب فيه هو قالب المقدمتين والنتيجة .

وهذا هو ما يجعلنا نقرر بأن المنطق الأرسطى كان منطقا صوريا إلى حد كبير ، لا يعنى بتطابق الفكر مع الواقع بقدر ما يعنى ببيان القواعد العامه التى يسير بمقتضاها الفكر وهو يربط التصورات فى قضايا ثم يربط القضايا فى أقيسة .

ومع هذا فنحن لا نستطيع أن نقرر بأن المنطق عند أرسطو كان صوريا خالصا ، إذ المنطق لكى يكون صوريا بحتا يجب أن يعبر عن تمام اتفاق الفكر مع ذاته Consistency ، ولكى يكون الفكر متفقا مع ذاته يجب أن يخضع بالضرورة لقانون عدم التناقض Law of non-contradiction بغض النظر عن مضمون التصورات أو التصديقات ومحتواهما المادى . بمعنى آخر إن على العقل أن يهتم فقط بارتباطات التصورات والتصديقات من الناحية الذهنية الصرفة بغض النظر عن كل تجربة ، وأن يراعى عدم الوقوع فى التناقض .

هذه الناحية الصورية الصرفة وإن كانت بغية أرسطو فى تحليلاته الأولى، إلا أنه فى تحليلاته الثانية يتحدث بكل وضوح عما يسمى الآن بمناهج البحث فى العلوم، أو بمعنى آخر « يتحدث عن الاستدلال من حيث انطباقه على موضوع العلم »[1] وانطباق الاستدلال على موضوعات العلم إنما يرجع بنا إلى المنطق المادى الذى يهتم بانطباق الفكر مع الواقع .

ونخلص من هذا إلى أن المنطق الأرسطى كان مزيجا من الصورية والمادية ، وإن غلبت عليه الناحية الصورية . والواقع أن شراح أرسطو لم يهتدوا بالناحية المادية من المنطق الأرسطى وإنما صبوا كل اهتمامهم على الناحية الصورية الصرفة من هذا المنطق .

وتحت تأثير الشراح ، وبخاصة شراح العصور الوسطى، فهم المنطق الأرسطى على أنه منطق صورى بحت لا مادة له . وأنه منطق شكلى صرف. يقول تريكو: « إن العصور الوسطى كانت بمثابة العهد الذهبي للمنطق الأرسطى الشكلى بأقصى

---

1. O'Hamelin : Le systéme d'Aristote p. 95.

معانى الشكلية »[1]. ومن هنا بدأت صيحات عصر النهضة فطالب بالقضاء على هذا المنطق الشكلى العقيم الذى لا يربطنا بالواقع ؛ وبلغت هذه الثورة أوجها عند ديكارت وبيكون وجاليليو .

ب - المنهج الاستقرائى والمنهج الاستدلالى الرياضى .

رأى أنصار هذا الاتجاه أن الفكر المجرد غير قادر على اكتشاف الحقائق ؛ وإننا يجب أن نتجه إلى الرياضة والتصورات الخاصة بالعدد وبالمقدار عند ديكارت، وإلى الفكر الواقعى القائم على التجربة والاستقراء عند بيكون وجاليليو .

وكان لابد أن يقوم منطق جديد فى مقابل المنطق الأرسطى؛ منطق يقوم على الاستقراء ، ويعتمد على الملاحظة والتجربة لأمور واقعية نصل منها إلى القوانين، ومن هنا أدخل منهج جديد هو المنهج الاستقرائى ، ومنطق جديد هو المنطق المادى الاستقرائى .

ومن جهة ثانية ، فلقد بدا لعلماء الرياضيات أن طريقة البرهنة بالخطوات الرياضية هى الطريقة الأدق والمثلى ، وهى الطريقة التى تتبع نسقا استنباطيا Deductive system نبدأ فيه بمجموعتين من التعريفات والمسلمات ، نسلم بهما تسليما ، ثم ينتقل الذهن من هاتين المجموعتين اللتين سلم بصحتهما إلى استنباط القضايا . ولقد نادى أصحاب الرياضيات وعلى رأسهم ديكارت باتباع هذا المنهج الرياضى بدلا من المنهج القياسى العقيم الذى سار عليه أرسطو والمدرسيون ،

الطائفة الأولى إذن وعلى رأسها بيكون وجاليليو رأت أن المنطق القديم فى حاجة إلى تجديد من حيث ضرورة إدخال مناهج جديدة فى البحث عن الحقيقة تعتمد على الملاحظة والتجربة والاستقراء. أما الطائفة الثانية وعلى

---

1. Tricot : Traité de logique. p. 34.

رأسها ديكارت فقد رأت أن المنطق القديم فى حاجة إلى اصلاح وتطوير من حيث تعديل نظرياته وضرورة تكميمها ليسهل تطبيق المنهج الرياضى عليها .

وهكذا بدأت العلوم الطبيعية فى إيجاد منطق جديد يختلف كل الاختلاف عن المنطق الشكلى القديم ، ورأت أن دعامة هذا المنطق هو الواقع المادى التجريبى ، وأن منهجه هو الاستقراء الناقص وليس الاستقراء التام ؛ إذ أن هذا الاستقراء الناقص هو السبيل الوحيد لتقدم العلوم.ويلاحظ ليبنتز Leibniz أن هذا النوع الجديد من المنطق يعتمد على الحقائق والمعارف العرضية الممكنة ويقوم على مبدأ السبب الكافى Law of sufficient reason فى حين أن المنطق القديم الذى تطور تحت تأثير إدخال الرياضيات عليه يعتمد على الحقائق الضرورية التى تقوم على مبدأ عدم التناقض . يقول ليبنتز فى مونادولوجيته « إن استدلالاتنا تقوم على مبدأين عظيمين : أولهما مبدأ عدم التناقض . وبفضل هذا المبدأ نحن نحكم على تناقضنا الذاتى بأنه زائف وبنقيض ما هو زائف أو ما هو ضد له بأنه حقيقى . والمبدأ الثانى هو مبدأ السبب الكافى ، وبفضل هذا المبدأ نحن نعتبر بأنه لا يمكن أن يقال عن واقعة ما أنها صحيحة أو موجودة ، أو عن قضية أنها صادقة إذا لم تكن حاصلة على سبب كاف يوضح السبب الذى من أجله جاءت على هذا النحو وليس غير ذلك ... »[١]

وبعبارة أخرى فلقد أدى الهجوم على المنطق الشكلى القديم إلى قيام منهجين، منهج استدلالى رياضى ، ومنهج استقرائى أو تجريبى يقوم على الملاحظة والتجربة والاستقراء .

---

1. Leibniz : La Monadologie para 31 — 32.

جـ - خطوات نحو المنطق الرياضى

وهكذا قام المنطق الرمزى إبتداء من تطوير المنطق القديم واتخذ له منهجا يستمد يقينيته ودقته من الرموز الرياضية . والواقع أنه كان لأرسطو الفضل فى وضع أصول المنطق الصورى ، ذلك المنطق الذى جرد القضايا من مادتها الكثيفة ووضعها فى صورة الموضوع - المحمول . وتلك القضية المجردة التى صورتها أهوب اعتبرها أرسطو قضية بسيطة ، كما اعتبرها أيضا الوحـــدة التى ينتهى أو يتوقف عندها التحليل . وقد يكون لدينا تركيبات تتكون من قضية أو أكثر ، ولكن تلك التركيبات نستطيع أن نحللها لنصل فى النهاية إلى تلك القضية البسيطة « وعلى ذلك فالقضية البسيطة عند أرسطو أى القضية ذات الموضوع والمحمول هى الوحدة الأولية التى تتألف منها أية عملية فكرية أيا ما كانت »[1].

١ - أرسطو

ولقد كانت لأرسطو نظرات قيمة جداً فيما يتعلق بموضوع المنطق ومنهجه والغرض منه ، فمن حيث الموضوع كان أرسطو يطلق كلمة التحليل أى المنطق على تحليل الإستدلال والاستنباط محصوراً فى القيـاس إلى أشكال وضروب ، ثم مد إطلاق الكلمة بحيث شملت القضايا وما بينها من صلات متعددة . والنقد الذى يوجه إلى أرسطو من وجهة نظر اللوجستيقـا الحديثة أو المنطق الرياضى الحديث لا لأن أرسطو حصر موضوع المنطق فى الاستنباط وقوانينه ، فهذا هو موضوع المنطق المعاصر وإنما هو حصر الاستنباط فى القيـــاس وحده ، غير متنبه إلى ضرورة التوسع فى تحليل الاستنباط بحيث نرى قوانين أخرى لا تمت إلى القياس مثل علاقات المساواه ، أكبر من ، أصغر من ... الخ.

1. Cohen & Nagel : An introduction to logic and scientific mathod. p. 33.

ومن حيث المنهج فقد ميز أرسطو بين مايتصل بالصورة وما يتصل بالمادة ، وخص تحليلاته الأولى بالصورة التي هي صورة الاستنباطات ، ورأى القضايا كلها في صورة واحدة هي صورة الموضوع المحمول . وتكفي نظرة واحدة في تحليلاته لبيان مدى إهتمامه بإبراز الصورة في نقائها التام حين حاول إتخاذ الرموز الدالة على حدود القضية القياسية وهو ماكان يرمز لها بالحروف اليونانية الكبيرة . إلا أن رموز أرسطو كانت ناقصة ، إذ أنه رمـز فقط إلى المتغيرات المنطقية Logical Variables مثـل أ ، ب ، حـ ولم يرمـز إلى الثوابت المنطقية Logical Constants مثل إذا ... إذن ، كل ، بعض ... إلخ ولكنه مع رمزه الناقص هذا بين بكل تأكيد بأن كل صيغة منطقية هي دالةقضائية Propositional Function وليست قضية محددة ذات معنى قاموسى ، ولكنه لم يبين ماهية تلك الدالة القضائية ولم يضع لثوابتها رموزاً .

أما من ناحية الغرض فيرى أرسطو أن المنطق ينتسب بطبيعته إلى مجموعة العلوم البرهانيةdemonstrative Sciences التي توصف في العصر الحديث بعبارة النسق الاستنباطي deductive system ولكن أرسطو لم يتوسع في هذه الفكرة ولم يقم الدليل عليها كما أقامه في الهندسة . وفكرة كون المنطق علما برهانيا تبين الغرض منه عند أرسطو ، فهي تمنع من أن يكون المنطق صناعة أو صناعة وعلما أو علما معياريا ، إنما هو علم نظـرى أى نسق استنباطي كالهندسة ولذلك سماه أرسطو علم التحليل.

والسؤال الآن هو : هل يمكن أن تعتبر القضية الحملية التي قال بها أرسطو والتي صورتها عنده هي : ا هو ب قضية تحليلية ؟ الواقع أننا يمكن أن نعتبرها كذلك لأنها لاتتكون إلا من موضوع تحمل عليه محمولات معينة نستنتجها أو نستنبطها من مجرد النظر في ذلك الموضوع دون حاجة إلى معيار خارجي يحدد صدقها أو

كذبها . فالقضية الحملية الأرسطية هى تحليلية من حيث أنها قضية بسيطة تنحل إليها جميع التأليفات والقضايا المركبة .

ففضل أرسطو إذن يرجع إلى أنه أول من رسم إطار القضية التحليلية وإن كانت قضاياه الحملية تحتوى على حدود كلية يمكن أن تنحل إلى أبسط منها ، ولكن ثمة أمر هام نود أن نوضحه هنا وهو أن الرواقيين توصلوا إلى ذلك النوع من القضايا التحليلية من حيث الإطار من جهة ، ومن حيث إحتواء القضية على حدين كليهما جزئى من جهة أخرى .

والحق أن المعلم الأول صاغ مجموعة نظرياته رتبه وراثه التى أودعها نسقه المنطقى بطريقة نسقية منظمة ، جعلت مؤلفاته فى هذا الجزء تصل إلى درجة قريبة من الكمال فى معظم اجزائها . فصاحب المنطق ، وواضعه الأول وهب فكراً مكنه من معالجة كل أبحاث المنطق إما بطريقة مباشرة أو غير مباشرة .

فالمنطق كما وضعه أرسطو نظرية فى القياس Syllogism الذى هو مجموعة الاستدلالات غير المباشرة ، والقياس الارسطى يتألف من مقدمات Premisses ذات صورة معينة تفضى إلى نتيجة ، وكل مقدمة من مقدمات القياس تتركب من موضوع Subject ومحمول Predicate . يقول لنا ارسطو فى التحليلات الأولى « إذا كان ا تحمل على كل ب ، وكانت ب تحمل على كل حـ ، فإنه يتعين بالضرورة أن تحمل ا على كل حـ »[1]. هذا القياس يمكن وضعه فى الصورة التالية :

إذا كان ا محمولا على كل ب
وكانت ب محمولا على كل حـ
فإن ا محمولا على كل حـ

1. Aristotle, Prior Analytics, 25b, 35-40

كما يمكن ترجمة القياس السابق إلى الصورة الرمزية التالية :

كل أ هى ب

كل أ هى جـ

———————

∴ كل أ هى جـ

وفى الواقع أن وضع القياس الارسطى على هذه الصورة يقودنا إلى اعتبارين هامين بالنسبة للمنطق الارسطى :

الاعتبار الاول : يتمثل فى أن وضع القياس الارسطى على هذه الصورة إنما يفضى إلى نتيجة هامة مفادها أن أرسطو كان على دراية تامة بالرياضيات السائدة فى عصره ، وأنه قد أدرك أهمية الدور الذى تلعبه الرموز والمتغيرات والثوابت فى النسق المنطقى .

الاعتبار الثانى : أن وضع القياس الارسطى على هذه الصورة أيضا يعنى أن أرسطو قد أدرك أهمية مسألة التضمن implication والدور الذى يلعبه فى صورة القضية، رغم أن الباحثين يذهبون إلى أن مسألة التضمن قد عرفت فى عصر متأخر عن عصر أرسطو ، خاصة لدى الرواقيين .

لننظر الآن فى فحص هذين الاعتبارين لنقف على حقيقة وجوهر الفكر الارسطى فيما يتعلق بالمنطق . نحن نعلم أن أرسطو قد تلقى علومه فى الاكاديمية الافلاطونية، إبان دور النشأة والتكوين ، فنهل عن افلاطون بقدر ما استطاع ، ونعلم أيضا أن تعليم الاعضاء فى الاكاديمية كان يفرض عليهم دارسة الرياضيات ، فلقد وجد افلاطون أن منهج الاستدلال الرياضى هو أنجع الطرق التى يمكن بواسطتها البرهنة على وجود عالم المثل، ولذا فقد استعار المنهج الرياضى من الفيثاغوريين وطبق

منهجهم الفرضى ، وتمسك بضرورة دراسة الفيلسوف للرياضيات ولهذا فقد كتب على باب الاكاديمية (لا يدخل هنا إلا من كان رياضيا) » [١] ، وهذا فى حد ذاته يوضح لنا أن أرسطو نشأ منذ البداية نشأه فكرية ذات طابع رياضى ، ومن ثم فان معرفة أرسطو بالرياضيات السائدة فى عصره ، « ودوره وعلماء الليسيه فى تقدمها وجمعها ، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لاسسها وأصولها مما تجمعه كلمة المنهج الرياضى أمر لا مجال للشك فيه » [٢] .

والحقيقة فى هذا أن أرسطو حينما أخذ يستقل بفكره عن الفكر الافلاطونى ، وجد أن نظرية المثل التى انكب على نقدها ، اذا ما جردت من ردائها الرياضى أصبح من السهل تفنيدها ورفضها على أسس منطقية بحتة ، وأنه حرصا منه على الاستقلال حتى عن المنهج الافلاطونى لم يعر الرياضيات أهمية مباشرة ، إلا أن استخدامه لها كان بطريقة غير مباشرة ، فقد استند اليها فى نظرياته المنطقية ، فهو يبين لنا أن اليقين الذى تمتاز به قضايا الرياضة ونظرياتها أنما هو مستمد من أنها علم برهانى أوكما يقال الآن علم استنباطى أو نظرية أكسيوماتيكية » [٣] ، وهذا يؤكد لنا حقيقة هامة أدركها أرسطو أيضا ، فقد كان على بينة بأسس وأصول المنهج الاستنباطى .

يمكننا الآن أن نقرر أول خصيصة تنتمى للاعتبار الاول ، وهى أن أرسطو كان على دراية تامة بالرياضيات السائدة فى عصره ، والتحليلات الارسطية مثال صادق على مثل هذا الرأى . ويتعلق بهذه النقطه أمر آخر ، كشف عنه النقاب

---

(١) محمد على أبو ريان . تاريخ الفكر الفلسفى . ج ١ ص ١٤٣

(٢) محمد ثابت الفندى . فلسفة الرياضيات ص ٤٣

(٣) المرجع السابق ص ٤٣

المنطقى البولندى المعاصر يان لوكاشيفتش حين ذهب الى أن « ادخال المتغيرات فى المنطق من أعظم مبتكرات أرسطو »(١) . وسواء أكان أرسطو قد اعتبر كشفه هذا بديهيا أم لا ، فان المدرسيين ومناطقة العصور الوسطى لم يدركوا أهمية هذا الكشف العظيم ، والذى أشار اليه كل من الاسكندر الافروديسى ، ويوحنا الفيلوبونى ، حينما قام كلاهما بشرحه لفلسفة أرسطو ومنطقه . وقد أدرك كثير من الباحثين فى المنطق ، أهمية أرسطو فى هذه الناحية حتى أن بعضهم يعتبره مؤسس المنطق الصورى بمعناه الحديث(٢) .

وفضلا عن فكرة المتغيرات التى أمدنا بها أرسطو فى منطقه ، فقد زودنا بنظرية هامة فى الثوابت المنطقية (٣) واهم هذه الثوابت (و) ، (إذا) ، (ينتمى الى كل) ، (ينتمى الى لا واحد) ، (ينتمى الى بعض) ، (لا ينتمى الى بعض) . لكن أرسطو فى هذه الناحية بالذات لم يمض بتحليلاته فيها الى أبعد من ذلك ، فضلا عن كونه لم يحلل المنهج الرياضى قبل أن يطور نظريته فى القياس (٤) .

على هذا النحو يكون أرسطو قد زودنا فى نسقه المنطقى بفكرتين من أهم

---

١ . يان لوكاشيفتش . نقد نظرية القياس الارسطيه . ترجمة د. صبره . ص ٢١

2 Mourant, J. A., Formal logic. p. 212

ونحن نلاحظ أن المناطقة من أصحاب النزعه الرياضية فى المنطق يذهبون إلى أن المنطق الرياضى هو المنطق الصورى . ومن ثم فانهم حينما يتحدثون عن المنطق الصورى فانهم يعنون به المنطق الرياضى فى آخر اشكاله تطورا .

٣ - لوكاشيفتش . المرجع السابق ص ٢٧ .

4. Stebbing. S., Amodern Introduction to logic, P. 481

الافكار الاساسية التي يستند اليها المنطق الحديث، وهما فكرتي المتغيرات والثوابت.

أما فيما يتعلق بالمسألة الثانية والمتعلقة بفكرة التضمن، وما إذا كان وضع القياس الارسطى على هذا النحو يعنى أنه قضية تضمن أم لا، فان لوكاشيفتش من بين المعاصرين من المناطقة ذهب الى أن أرسطو قد صاغ أقيسته جميعا على أنها قضايا لزومية يتألف مقدمها من المقدمتين ويكون تاليها هو النتيجة[1]، ومن المعروف أن التضمن بصورته الدقيقة لم يعرف صراحة الا فى عصر متأخر عن العصر الارسطى، لكنه طالما أننا نقول أنه «اذا كان ا ينتمى الى كل ب، كان ب ينتمى الى بعض ا»[2]، فان هذه قضيه تضمن واضحة ؛ وبالتالى فان القياس الارسطى وضع فى اعتباره مسألة التضمن، وسنتعرض لهذه النقطة ونحن بصدد بحث الجهاز المنطقى لدى رسل.

الا أنه يمكن لنا أن نرى بوضوح أن مناطقة العصور الوسطى لم يدركوا حقيقة الفكر الارسطى فى هذه النواحى، وفضلوا حصر أبحاثهم فيما يسمى بالقضية الشخصية أو القضية الحملية ذات صورة الموضوع - المحمول Subject - Predicate على ما يقول رسل[3]

وبذلك ظل الجزء المتطور من البحث المنطقى الارسطى فى طى النسيان حتى تبين للمحدثين من المناطقة أهميته وعملوا على تطويره من خلال نزعاتهم التحليلية فى المنطق. لكن اذا كان هذا هو التصور الذى يذهب اليه المحدثين من المناطقة عن المنطق الارسطى فهل يختلف تصورهم هذا عن تصورهم للمنطق الرواقى؟

---

١. يان لوكاشيفتش. المرجع المذكور سابقا ص ١٤

٢. نفس المرجع السابق ص ٣٥

3. Russell., External world, p. 56

أم أنه لا توجد ثمة فروق جوهرية بين التصورين ؟ هذا ما ينبغى أن نبحثه الآن لنوضح أجابتنا على هذا التساؤل .

٢ — الرواقيون

فى الواقع أننا إذا ما نظرنا إلى المنطق الارسطى ، لوجدناه ينطلق من التصور المنطقى البحت ، ذلك أنه من مكونات المنطق الارسطى تلك الصورة « التى تدوم وتبقى بينما تتغير وتتبدل المادة التى تملأ بها »[1] . وبالتالى فان المنطق « أكثر العلوم تجريدا وتعميما وصورية »[2] ، لكن المنطق الرواقى رفض الاستناد لغير الواقع ، فالرواقيين أصحاب نزعة حسية تجريبية ومبدأ عملى ، ولذا صدرت أبحاثهم فى المنطق ونظرية المعرفة من المعطيات المباشرة للحواس التى تتكشف للعقل من خلال الجزئيات المحسوسة ، وهذا ما جعلهم يعتبرون المنطق جزءاً من الفلسفة ، وليس أداة لها كما تصور أرسطو[3] .

والمنطق الرواقى يقف على طرفى نقيض مع المنطق الارسطى ، فاذا كان المنطق الارسطى يستند إلى التصورات العقلية البحتة ، فان المنطق الرواقى يجمع بين الحس والعقل معا فى نسق واحد .

وهنا نتساءل : كيف ميز الرواقيين منطقهم عن المنطق الارسطى ؟

يذهب الرواقيون إلى تقسيم المنطق إلى قسمين كبيرين ، الاول خاص بالخطابة ، والثانى خاص بالجدل .

---

(1) Jevons., Elementary Lessons in Logic, p. 5

(2) Keynes., Formal Logic, p. 8

(3) Hamlyn : Greek philosophy after Aristotle, ch. 4, p. 68, ed. in " A Critical History of Western philosophy ", by O'Connor.

ويعنينا فى هذا الصدد القسم الخاص بالجـــدل ، والذى قسمه الرواقيون إلى ثلاثـة أقسام ، الأول يبحث فى نظـرية الدلالة حيث موضـوع دراستـه الشعر والموسيقى والنحو أى قـواعد اللغة . والثانى يبحث فى المدلولات ، أى فى الاشياء التى تقصدها الإشارة أو التسمية أو الدلالة . والثالث هو الجـزء الذى يتضمن معايير الصدق والـكذب ، أى نظرية المعرفة[1] .

والرواقيون يجعلون من الأساس الا بستمولوجى ركيزة أساسية للاســاس المنطق ، ولذا اهتموا بنظرية المعـرفة ، وبحثوا فى معيـار الصدق والـكذب على اعتبار أنه المحك الوحيد فى صدق الأفكار والتصورات . وحتى يتسنى لنا استكناه حقيقة وجوهر المنطق الرواقى لابد وأن نقف على أبعاد نظرية المعرفة الرواقية.

تستند المعرفة لدى الرواقيين إلى الجـزئى المحسوس لأن « الفرد هو الحقيقـة الصحيحة »[2] الذى تبدأ عملية الادراك من خلاله ، فالنفس فى أصلها صفحة خالية Tabula Rasa تستقبل التصورات نتيجـة لانطبـاع الآثار الحسية الخـارجية فى النفس التى تتلقى التصورات المتعارفة التى تقـوم على الادراك الحسى المباشر ، ومن ثم فإنها تتسم بطابع يقينى مباشر ؛ فاذا ما صدقناها « فكأننا ندرك الموضوعات الصادرة عنها فى ذاتها »[3] وهذا ماحدا بهم أن يجعلوا « معيار الصحة ذاتيا يقوم على التصديق النفسى وهذا هو كل ما يؤسس حقيقة الصلة بين الحس والمحسوس »[4].

من هنا نجد أن الرواقيين يميزون بين الأثر الحسى المباشر الذى ينطبـع فى

---

(١) محمد على أبو ريان ، أرسطو ، ص ٢٧٩
(٢) عثمان أمين ، الفلسـفة الرواقية . ص ٧١
(٣) محمد على أبو ريان ، أرسطو ، ص ٢٨١
(٤) المرجع السابق ، نفس الموضع

النفس من خلال الاحساس المباشر، وبين التصور المتضمن تصديقا من حيث كونه معيارا للحقيقة ، ومن ثم فان التصورات فى جوهرها تعتبر « معـــايير الصدق والـكذب ما دامت صادرة عن الادراك الحسى الذى هو أساس المعرفة [١].

إن اساس المعرفة على هذا النحو ، كما زودنا به الرواقيون ، يلقى الضوء على طبيعة المنطق الرواقى المرتبط بنزعتهم الحسية ، وهذا ما جعلهم يميزون بين نظرية المعنى Meaning ونظرية القضايا Propositions .

وفيما يختص بنظرية المعنى الرواقية ، « فلاشك أنها يرون الفكر واللغـــة متطابقين وذلك هو السبب فى عنايتهم بدراسة اللغـــة من أجل المنطق » [٢] ، واعلان مثل هذا الرأى من جانب الرواقيين ، يلقى كـثيرا من الضوء على طبيعة الدراسات المنطقية واللغوية الحديثة ، التى ترتد فى الكثير من أجـــزائها الى الإرهاصات الأولى التى قدمها الرواقيون فى مجال تصورهم لحقيقة الدراسات المنطقية ، وليس هناك شك فى أن الرواقيين قد تميزوا فى هذا المجال عن أصحاب النزعة الأرسطية .

والرواقيون يميزون بين ثلاثة أمور متمايزة فى اطار نظرية المعنى هى :

١ — الـكلام « وهـو مجموع الحروف الملفوظة أو المكتوبة فى مثل كلمة الرواق » [٣] .

٢ — مدلول الكلام « أو مضمون الفكر وهو الذى يسمونه لكتون ، وهو بمثابة الوسط بين الفـكر والكلام الخارجى ، أو بمثابة النقطة التى يلتقيان فيها » [٤].

---

(١) المرجع السابق ، ص ٢٩١

(٢) عثمان امين ، المرجع السابق ، ص ١٢٣

(٣) نفس المرجع ص ١٢٤

٣ — موضوع الكلام، وهو الشيء الحقيق المشخص الموجود فى الخارج»[١].

وفى النصف الثانى من القرن التاسع عشر نجد تشارلز بيرس (١٨٣٩ - ١٩١٤) يدرك أهمية هذا التمييز بحيث وجدناه يؤكد أنه « لكى نؤكد معنى تصور عقلى لابد وأن نضع فى الاعتبار النتائج العملية التى تنجم بالضرورة من صدق ذلك التصور ، ومجموع هذه النتائج هو الذى يعطى المعنى الكلى للتصور »[٢]، أى أن بيرس وجد ضرورة الربط بين المعانى والتصورات المجردة فى إطار مذهبه البرجماتى .

ونظرا لان الرواقيين ينزعون نزعة حسية تجريبية ، فان هدف المنطق لديهم يكمن فى الاستدلال الصادق [٣] ، والاستدلال المنطقى الصحيح لا يكون إلا من خلال منطق دقيق ، ذلك المنطق الذى يهتم أساسا بالعلاقات بين القضايا ، ومن ثم فانهم يميزون القضايا عن الجمل Sentences والوقائع Facts ، وذلك لاسباب تتعلق بطبيعة منطقهم الحسى التجريبى [٤] ، ولم يهتم الرواقيون بالحدود Terms أو المحمولات كما فعل أرسطو ، بل اهتموا بالقضايا ، وقياسا على هـذا اعتبروا المحمولات ناقصة بالنسبة للقضايا ، وهم فى هذا يلتقون مع بعض المناطقة المعاصرين فى اعتبار القضية بمثابة الصورة الأساسية للفكر [٥] .

وتقسيم القضايا أو تصنيفها لدى الرواقيين يختلف عن ذلك التقسيم الارسطى المعهود فى كتب أرسطو المنطقية، فبينما نجد أرسطو يصنف القضايا تصنيفا رباعيا،

---

(١) نفس المرجع ص ١٢٥

(2) Peirce, c.s., Collected papers. vol. v. p. 6

(3) Hamlyn, op. cit, p. 68

(4) Ibid, p. 68

(5) Ibid, p. 69

حيث ينسب محمولا من المحمولات الى موضوع فى الصور الاربعة [١] : الكلية الموجبة حيث (كل أ هى ب) والكلية السالبة حيث (كل أ ليست ب)، والجزئية الموجبة وفيها (بعض أ هى ب) ، والجزئيه السالبة والتى صورتها (بعض أ ليست ب) ؛ على اعتبار أن هذه الصور جميعا لدى أرسطو هى أبسط صور القضايا ؛ حيث القضية الحملية هى أبسط القضايا ، وهى الوحدة الاولية التى تتألف منها أية عملية فكرية ، [٢] ، بينما نجـــد هذا التصور للقضية من الجانب الأرسطى ، نجد الرواقيين يصنفون القضايا تصنيفا يخالف التصور الارسطى المألوف لدينا ، وتقسيمهم للقضايا يرتبط بالموضوع الجزئى المشخص ، حيث القضية هى وعاء الفكر ، والفكر يعبر عن الواقع الخارجى .

يصنف الرواقيون القضايا فى قسمين كبيرين : القسم الأول ويضعون فيه كل القضايا البسيطة. أما القسم الثانى فيشمل كل أنواع القضايا المركبة. والقضية البسيطة فى النسق الرواقى تقابل القضية الذرية فى النسق اللوجستيقى ، أما القضية المركبة فتقابل القضية الجزيئية فى اللوجستيقا المعاصرة ، وبذلك فان وجهة نظر المناطقة المعاصرين من أمثال رسل وهوايتهد من دعاة المذهب اللوجستيقى تتفق وتحليل الرواقيين والميغاريين لها [٣] .

أما القضية البسيطة فى النسق الرواقى — أى القضية الذرية فهى التى نحمل فيها صفة من الصفات على موضوع من الموضوعات دون حاجة إلى رابطة منطقية. وللقضية من هذا النوع ثلاثة أنماط :

---

(1) Mourant, op. cit, p. 76

(2) Cohen & Nagel., An Introduction to logic, p. 33

(3) Hamlyss., op. cit, p. 69

أولا : قد يكون الموضوع معينا definite مشار إليه مثل هذا (١) .

ثانيا : وقد يكون غير معين Indefinite مثل بعضهم .

ثالثا : أو قد يكون شبه معين Intermediate مثل سقراط .

وأهم ما نلاحظه على هذه الأنواع الثلاثة من القضية البسيطة أن المحمول فيها « هو دائما فعل أى حدث ، وشيء يحصل للموضوع » (٢) .

أما القسم الثانى والذى يضعون فيه تصنيفا للقضايا المركبة ، أو ما يعرف حديثا بالقضايا الجزيئية — التى تعتمد على الثوابت المنطقية — فانه يعتبر بمثابة مجال خصب لوضع الاسس المنطقية للابحاث الحديثة . فالقضايا المنطقية عندهم تتميز بأنها «تكاد تكون دائما قضايا مركبة شرطية : متصلة أو منفصلة» (٣) . ولاشك أن الرواقيين قد أدركوا الاسس المنطقية التى تستند اليها هذه القضايا ، وهم فى هذا الصدد قطعوا شوطا كبيرا وقل أن يصل المعاصرين من المناطقة إلى حقيقة هذه القضايا ، ويؤكد لنا الدكتور عثمان أمين أن مدام انطوانيت قد « بينت وجوه القرابة بين المنطق الرواقى وبين المنطق الجديد المسمى فى عصرنا لوجستيك إذ أوضحت أن اللوجستيك بحرصه الدائم على التعبير عن الوقائع قد أفصح عن العلاقة المبنية بين نشاط الفكر والوجود الواقع » (٤) .

فالقضية الشرطية المنفصلة « تتألف من قضيتين متناقضتين ، ولا تكون صحيحة

---

(١) عثمان أمين ، المرجع السابق ذكره ، ص ١٣٢ . والمصطلحات المذكورة من وضعنا .

(٢) نفس المرجع ، نفس الموضع

(٣) المرجع السابق ، ص ١٣٣

(٤) المرجع السابق ، التصدير ، ص ١١

إلا باضطراد التعارض بينهما . ولما كانت الشرطية المنفصلة تعبيرا مباشرا عن مبدأ عدم التناقض فلها بداهة كاملة مثل ذلك المبدأ »[1] ومثالها أما أن يكون الوقت نهارا وإما أن يكون ليلا [2] . أما القضية الشرطية المتصلة « فهى تلك التى يمكن أن تؤخذ فى نظر الرواقيين مثلا لسائر قضايا المنطق »[3] وهذه القضية تقرر أنه « اذا كان موجودا ما حائزا صفة من الصفات كان بالضرورة حائزا صفة أو صفات أخرى » [4] مثال ذلك اذا طلعت الشمس فالنهار موجود ، ولهذا كان الرواقيون يعتبرون هذه القضايا بمثابة « أبسط صور البرهان ، وبها يبدأ نظر المنطق » [5].

وعموما فانه يمكننا القول بأن الفضل يرجع للرواقيين [6] فى تحويل النظر المنطقى من التصورات على اعتبار أنها كليات ، إلى القضايا أو الاحكام ، فضلا عن أنهم بدأوا فى منطقهم بالقضية الذرية ، وهذا الامر هو ما قبله رسل فيما بعد وهو بصدد وضع النسق المتكامل للوجستيقا ، كما وأن نزوعهم إلى الناحية التجريبية كان بمثابة الاساس الذى بدأ منه المعاصرون ، وعليه فإنهم يستنتجون

(١) نفس المرجع ص ١٢٣

(٢) الأمثلة الوارده فى هذا الصدد مأخوذة من كتاب الدكتور عثمان أمين

(٣) المرجع السابق ص ١٢٣

(٤) المرجع السابق ١٢٣

(٥) المرجع السابق ١٣٤

(٦) ويشير دافيد ميتشل . الى أنه رغم ان منطق القضايا قد بحثه المناطقة الرواقيين بحثا نسقيا مستفيضا بعد أرسطو الا انهم لم يقدروا حق التقدير . ومن ثم كان اكتشافهم ذا تأثير ضئيل على المنطق التقليدى . ولم يدرك المناطقة أهمية منطقهم الا فى القرن التاسع عشر .

Mitchell, D., An Introduction to logic, qp. 42 - 43

وقائع يمكن مشاهدتها من وقائع مشاهدة حاليا (١) ،كما ويرجع الفَضل إليهم فى اكتشاف الثوابت المنطقيـة مما نجده أمرا ضروريا فى قضـايا النسق اللوجستيق المعاصر .

هاجم الرواقيون المنطق الأرسطى هجوما عنيفا خصوصا من ناحية احتواء القضية الحملية على الحدود الكلية . وذهبوا إلى القول بالحدود الجزئية أو المخصوصة، فزينون الرواقى وكريزيب وغيرهما من الرواقيين أكثروا من الكتابة فى الأمراض، ومن ثم جاء إتجاههم التجريبي الذى تعكسه لنا نظريتهم فى المعرفة ، وهى النظرية التى يقوم عليها منطقهم .

فهم يقولون أن المعرفة تأتى من الأثر الحاصل عندنا من موضوع خارجى ، ويسمون هذا الأثر صورة Image ، والمعرفة عندهم تتكون من هذه الصورة الآتية من الخارج ثم من القول المعبر عن تلك الصورة ، والذى هو تعبير عنها بكل ما هو فيها من جزئى وشخصى . فالأقوال كلها كما تصورها الرواقيون مخصوصة، فهم أعداء لكل ما هو كلى لأنهم حسيون، وقد إستخدموا اسم الإشارة مثل « هذا » بغية مزيد من الحذر والتحوط وبألا يقعوا فى أى حد كلى .

والمنطق الرواقى من ناحية ثانية لا يكتفى بتسجيل الوقائع الجزئية أو الشخصية أو الذرية على حد تعبير رسل فى قضايا منفردة مبعثرة ، بل هو يستنتج من واقعة مشاهدة واقعة أخرى يمكن أن تشاهد ، وذلك بواسطة كلمات مثل « إذا » « أو » « و » « لأن » . . . ألخ . وأهم القضايا التى تهمنا من وجهة نظر المنطق الرياضى المعاصر هى : —

---

(١) د. ثابت الفندى « اصول المنطق الرياضى » ص ١٢٨

(١) القضية المنفصلة التى تربط واقعتين بكلمة « أو » ومثال الرواقيين هو « هى نهار أو هى ليل » .

(٢) القضية المتصلة التى تربط واقعتين بكلمة « و » ومثال الرواقيين هو « هى نهار وهى ليل » .

(٣) القضية الشرطية التى تربط بكلمة « إذا » واقعتين إحداهما المقدم وهو الشرط وأخراهما التالى وهو المشروط ومثالهم « إذا هى نهار فهى مضيئة » .

ولقد حاول مؤرخو المنطق رد المنطق الرواقى - رغم إستقلاله - إلى المنطق الأرسطى فردوا القضايا الرواقية إلى القضايا الحملية . ولكن عندما طبق ليبنتز العمليات الرياضية كالجمع والضرب فى معالجة الأمور المنطقية، ثم لما أتضح أن كلمات مثل « أو » « و » إنما تشير إلى علاقات بين القضايا الذرية ، وينتج عن ارتباط القضايا الذرية بتلك الثوابت ما يسميه رسل بالقضايا الجزيئية، وأن هذين النوعين من القضايا أى الذرية والجزيئية يكونان معا القضايا الابتدائية التى هى موضوع القسم الأول من اللوجستيقا ؛ نقول لما اتضح كل هذا تكشفت الصلة الوثيقة بين المنطق الرواقى واللوجستيقا المعاصرة ، الأمر الذى جعل للمنطق الرواقى الصدارة فى العصر الحديث ، والذى أدى إلى تفوقه على المنطق الأرسطى [١] .

ولقد نهج المدرسيون فى هذا الصدد النهج الأرسطى؛ فاهتموا بالشكل الخارجى للقضايا وخصوصا القياس ، كما اهتموا بالمشكلات اللفظية والقياسية ، فتجمد منطق أرسطو، وأصبح عقيما مجدبا غير منتج ، الأمر الذى أدى إلى الثورة على هذا المنطق فى عصر النهضة وفى بداية القرن السابع عشر أى فى بداية العصر الحديث ، وعلى وجه أكثر تحديدا عند ديكارت .

---

(١) ثابت الفندى : أصول المنطق الرياضى ص ص ١٢٨ — ١٢٩

رأينا أن أرسطو خصوصا فى تحليلاته الأولى كان يهتم بالناحية الصورية ، ويرمز إلى القضية الحملية التى هى القضية البسيطة عنده بالصورة أ هو ب ، ولكن رموزه جاءت ناقصة أشد النقص ؛ إذ أنه لم يرمز إلى الثوابت على الإطلاق. ورأينا أن المنطق الرواقى هاجم الحدود الكلية التى تظهر فى القضية التحليلية الأرسطية وأشار إلى ضرورة كون حدود القضية جزئى وشخصى .

٣ — ديــــكارت

أما ديكارت «فقد حاول أن يجعل الاستدلالات المنطقية تحاكى قدر الامكان الاستدلالات الرياضية ، وذلك لما امتازت به هذه الأخيرة من وضوح ودقة فائقتين ، ولكن كيف يتمكن المنطق الصورى من قبول موضوع الرياضة ومنهجها ؟ » (١)

يقول ديكارت أننا نتمكن من ذلك باستخدام الرموز أولا فى المنطق الصورى كما هو الشأن فى الرياضة . ولكن استخدام الرموز وحدها ليس هو المهم ، إذ حاول هذه المحاولات كثيرون من قبل منهم أرسطو نفسه والرواقيون وريموندليل Raymond Lulle وغيرهم ، وإنما المهم وهذه هى الخطوة التالية التى تمكن المنطق الصورى من أن يصير يقينا وواضحا ودقيقا كالرياضة - إنما المهم - هو إستعمال الرموز إستعمالا منهجيا دقيقا طبقا لقواعد محددة تعطينا نتائج يقينية .

وعلى هذا النحو يكون ديكارت قد سعى إلى منهج جديد يستبعد فيه القياس الأرسطى ويستخدم الحدس الذى يعتمد عليه المنهج الرياضى والذى يبدأ من الأفكار الواضحة المتميزة مدركا ما بينها من علاقات فيتقدم من أبسط الحقائق

1 . Paul Mouy : Logique P. 235 .

ويتدرج إلى أعقدها »[1] ويساعده فى ذلك الاستنباط « الذى يوضح كيف تتحد الطبائع البسيطة وعلى أى نحو تتألف بعد أن يتضح ما بينها من علاقات ضرورية وهذا هو طريق التقدم فى المعرفة »[2].

ومع أن ديكارت يتفق مع أرسطو فى ضرورة تحليل ما هو مركب لكى نصل إلى ما هو بسيط إلا أن ثمة نقطتين يختلف فيها ديكارت عن ارسطو :

الأولى : أن القياس الأرسطى أو الأستدلال القياسى لا يؤدى إلى معارف جديدة والأفضل استخدام الاستدلال الرياضى .

والثانيه : أن الوحدة الأولى لا تكون قاصرة على القضية الحملية وحدها ذات الموضوع والمحمول ، وإنما على كل قضية لا تحتوى على شىء أكثر مما يكون فى عناصرها البسيطة .

٤ — ليبنتز

أما ليبنتز فقد سعى ما وسعته الحيلة إلى إيجاد هجاء عام يستخدم فيه المنهج الرياضى ، وينطبق على جميع المعارف والعلوم . وهو يسمى محاولته هذه الهجاء العام Caracteristique universelle أحيانا وباللغة العالمية Langus universelle أحيانا ثانية ، وبفن التركيب Art de combinatoire أحيانا ثالثة ، وبفن الاختراع Art d'invention أحيانا رابعة .

وقد نجد أساسا لهذه الفكرة عند ارسطو وريموندليل وديكارت ، فنحن نعلم أن أرسطو كان يقوم بوضع جدول لكل الحدود المتوسطة فى قياسة ويرمز لها ،

---

(١) عثمان أمين : ديكارت ص ١١٢

(٢) نفس المرجع : نفس الموضع .

وما دامت هذه الحدود المتوسطة هى المتوسط الذى تلتقى فيه الحدود الكلية والحدود الصغرى فإنه ينتج أن ترميز مثل هذه الحدود سيوصلنا إلى هجاء عام أو منطق رمزى أو لغة عالمية .

أما ريموندليل فلعله أول من قال بفكرة العلم الكلى هذه فى القرن الثالث عشر فلقد أشار فى كتاب له أسماه « الفن الأكبر » إلى أننا يمكن أن نتخيل علما عاما كأساس للعلوم كلها . وهذا العلم العام يشتمل على جميع مبادىء ومعانى العلوم مرموزة برموز الرياضة ، ويتكون من مجموعها ما يسمى بالهجاء العام الذى نصبح فيه حاسبين لا قياسيين . أما ديكارت فقد ذهب إلى أن الهندسة أو الرياضيات إنما هى ثوب خارجى لرياضة أعلى أسماها العلم الكلى ، وفيها ندرس العلاقات جميعها بأسلوب رياضى ؛ وهذه الرياضة الأعلى إنما تأتى عن الرمز للطبائع البسيطة التى نصل إليها بواسطة التحليل .

وجملة آراء هؤلاء مؤداها أننا إذا استطعنا أن نعبر بوضوح كامل عن كل أفكارنا بالرموز ، كتلك التى نستخدمها فى الحساب مثلا ، فإننا نستطيع السير فى كل العلوم تماما كما نسير فى الحساب . وهذه الرموز ذات الخصائص المعبرة عن أفكارنا سوف تكوّن لهجة جديدة أو لغة جديدة يمكن استخدامها نطقا وكتابة وفهما . ومن الواضح أننا لو توصلنا إلى تلك اللغة العامة أو الهجاء العام فى جميع المعارف والعلوم فإننا سنصل إلى نفس الدقة والوضوح التى تمتاز بهما الرياضيات، فى جميع معارفنا وعلومنا .

ولقد كان ليبنتز يستخدم حروفا أبجدية أو أرقاما أولية ، وهو كان يستخدم الحروف الأبجدية أول الأمر ليعبر بها عن العلاقات والتصورات أما مركبات هذه العلاقات والتصورات فيعبر عنها بحاصل ضرب هذه الحروف ، فهنا ازدواج فى

استخدام الحروف الأبجدية من ناحية والأرقام من ناحية أخرى . فقولنا أرسطو فيلسوف وعالم أو سياسي ، يساوى تعبيرنا الرمزى أرسطو يكون أ و ب أو حـ ، وكان ليبنتز فى أحيان أخرى يرمز إلى الأشياء برموز عددية فمثلا والمثال من روث ليدياسو لكى نعبر عن القضية « الانسان حيوان عامل » علينا أن نفترض أن الرقم ٦ يعبر عن الانسان والعدد ٢ يعبر عن الحيوان والعدد ٣ يعبر عن عاقل، وبذلك تصبح القضية « الإنسان حيوان عاقل » معادلة تقرر أن ٦ = ٢ × ٣[١].

ومعرفة المركبات لايتم إلا بتحليلها إلى أجزائها البسيطة المكونة لها بحيث أننا لو أطلقنا على تركيب ما الرمز أ ب حـ ، فإننا إذا حللنا ذلك المركب إلى عناصره الأولية وعرفنا الأفكار البسيطة التى تشير إليها الرموز أ ، ب ، حـ لاستطعنا أن نتوصل إلى معرفة هذا المركب .

هذا من ناحية تحليل الأفكار إلى بسائطها ، والتعبير عن تلك البسائط بالرموز . أما ما يسميه ليبنتز « بفن التركيب » Art de combinatoire فهو منهج جديد يكمل المنهج التحليلى الأول ، وعن طريقه نستطيع أن نتوصل الى الاختراعات والاكتشافات . هذا المنهج تقوم فكرته الأساسية على ذكر كل التأليفات أو التركيبات الممكنة لأى فكرة بسيطة ، بحيث يتكون عن ذلك قائمة من الأفكار البسيطة نتوصل إليها عن طريق التأليف ، وتكون متضمنة لكل ما يمكن أن يوجد فى العالم من أشياء فلو عبرنا عن البسائط بالحروف الأبجدية مثلا ثم ربطناها معا كل اثنين معا ، كل ثلاثة معا ، كل أربعة معا ، وهكذا فاننا نحصل على عدد من التأليفات أو التركيبات . ولنفرض أننا أخذنا الحروف أ ، ب ، حـ ، د ، هـ لنعبر بها عن خمسة أفكار بسيطة فإننا نستطيع أن نحصل على التأليفات الآتية :

---

1. Saw; R. L. Leibnitz ch 8 p. 219

ا　　أ ب　　أ ب حـ　　أ ب حـ د　　أ ب حـ د هـ

　　أ جـ　　أ جـ د　　أ حـ د هـ

　　أ د　　أ د هـ

　　أ هـ

ب　　ب حـ　　ب حـ د　　ب حـ د هـ

　　ب د　　ب د هـ

جـ　　حـ د　　حـ د هـ

　　حـ هـ

د　　د هـ

هـ

وإذا أطلقنا بعد ذلك تسميات على تلك التاليفات كل حسب ما يحتـويه من بسائط لكان من السهل علينا معرفة كل محمولات الشيء من مجرد معرفة اسم هذا الشيء [1] .

وقد ترتب على ذلك الهجاء العام أو « فن التركيب » أن توصل ليبنتز إلى أفكار رئيسية أهمها : —

١ — من الممكن إرجاع جمع التصورات إلى تصورات بسيطة بعملية تشبه تلك التى نصل بواسطتها إلى العلامات الأولى للأعداد . ومعنى هذا أننا إذا كنا فى

---

1. Ibid : P. 211

الرياضة نصل بواسطة التحليل إلى المعاملات الأولى للأعداد مثلا ، فإننا نستطيع أيضاً أن نرد تصوراتنا بالتحليل إلى التصورات الأولى البسيطة التي لا يمكن ردها إلى أبسط منها .

٢ — يمكن تأليف كل التصورات المركبة إذا مارتبنا البسائط . وهذه خاصية تتعلق بالتركيب . فبعد أن حللنا التصورات إلى بسائطها ، يمكن — إذا مارتبناها على نحو دقيق — إعادة تركيبها . ومن ثم نحصل على التصورات المركبة .

٣ — لا يوجد إلا عدد قليل من الأفكار البسيطة ، ولكن الكثرة تتولد عنها بفضل فن التركيب .

٤ — يجب الرمز إلى الأفكار البسيطة برموز بسيطة ، وإلى الأفكار المركبة برموز مركبة ، فالرمز المركب سيكون مشيرا للتصور المركب .

٥ — التفكير يتكون من إماطة اللثام عن كل العلاقات الموجودة بين البسائط [1] .

وعلى هذا النحو يكون ليبنتز قد استخدم الرموز بدلا من المادة الكثيفة والحساب بدلا من القياس . إلا أن ليبنتز لم يستطع أن يحقق من برنامجه الطويل هذا غير جزء قليل ، ومع ذلك فلقد ارتبطت الأبحاث المنطقية اللاحقة بأبحاث ليبنتز تمام الارتباط .

ولقد شهد القرن الثامن عشر محاولات عديدة لاقامة المنطق الرياضى فظهرت أبحاث لمبرت Lambert ثم أبحاث هولند Holland وبلوكيه Ploucquet وكاستيون Castillon ، غير أنهم لم يستطيعوا التوصل إلى شيء له أهمية في ميدان المنطق الرياضى .

---

1. Ibid ; P .213 .

٥ — وليم هاملتون

وفى القرن التاسع عشر تقدمت الأبحاث المنطقية الرياضية تقدما ملحوظا فقامت محاولات تكميم المحمول على يد جورج بنتام فى كتابه Outline of a new system of logic ، ولكن وليم هاملتون هو الذى توسع فى هذه النظرية وأعطاها صورتها الكاملة . فلقد بيّن هاملتون أن المحمول فى القضية يمكن أن تعين ناحيته الكمية كالموضوع سواءبسواء . وتكميم المحمول يعتبر خطوة هامة فى سبيل إقامة المنطق الرمزى الذى يحول الكيف إلى الكم ويصيغ القضايا فى صورة معادلات جبرية رمزية تقربها من القضايا الرياضية ومن هنا فلقد انقسمت القضايا عند هاملتون إلى ثمانية أنواع لا إلى أربعة كما كان الحال فى المنطق القديم وهذه الأنواع هى :

١ — موجبة الكل كلية مثل كل مثلث هو كل ذى ثلاثة أضلاع ويرمز إليها بالحرف u . كل أ هى كل ب .

٢ — موجبة الكل جزئية مثل كل مثلث هو بعض الأشكال الهندسية ويرمز اليها بالحرف A . كل أ هى بعض ب .

٣ — موجبة الجزء كلية مثل بعض الأشكال الهندسية هو كل مثلث ويرمز إليها بالحرف y . بعض أ هى كل ب .

٤ — موجبة الجزء جزئية مثل بعض الأشكال الهندسية هى بعض المثلثات ويرمز إليها الحرف I . بعض أ هى بعض ب .

٥ — سالبة الكل كلية مثل لا واحد من المثلثات هو واحد من المربعات ويرمز إليها بالحرف E . لا أ هى كل ب .

٦ — سالبة الكل جزئية مثل لا واحـــد من المثلثات هو بعض الأشكال الهندسية المتساوية الأضلاع . ويرمز لها بالحرف n . لا أ هى بعض ب .

٧ — سالبة الجزء كلية مثل بعض الحيوان ليس كل الإنسان ويرمز إليهـــا بالحرف o . بعض أ ليس كل ب .

٨ — سالبة الجزء جزئية مثل بعض الحيوان ليس بعض الانسان ويرمز إليها بالحرف w . بعض أ ليس بعض ب .

٦ — دى مورجـــان

ولقد استطاع دى مورجان فى عام ١٨٤٧ أن يعبر بالرياضيات عن قوانين المنطق ، واستطاع أن يدخل القوانين والرموز الرياضية فى الميدان المنطقى ، كما استطاع أن يكشف عن صور جديدة للقياس وعن أنواع جديدة من القضايا ، ولو أن دى مورجان لم يكن محصورا فى نطاق المنطق الارسطاطاليسى لاستطاع أن يقفز بالمنطق خطوة حاسمة ونهائية نحو صيغته الرمزية ، إلا أن إصراره على تعديل المنطق الصورى قد أغفله عن التنبه إلى علاقات وقوانين ونظريات منطقية لم يكن فى مقدور المنطق القديم أن يميط اللثام عنها .

قام دى مورجان بتقديم تحليل دقيق للرابطة التى نربط بها بـــين الموضوع والمحمول فى القضية is وبين أهميتها واستعمالاتها المختلفة ، كما ميز بين الإضافات المتعدية transitives والمنعكسة Convertibles والمتضايفة Corrélatives ، وهو تمييز هام كان له دوره الضخم من التأثير فيما بعد فكان بذلك أول من أرسى دعائم منطق الإضافات الذى توسع فيه رسل كل التوسع فيما بعد (١) .

---

(١) عبد الرحمن بدوى : المنطق الصورى والرياضى ص ٢٥٦

٧ — جورج بول

يعد جورج بول Boole بحق مؤسس المنطق الرياضى . فقد كان ذا نزعة رياضية منذ صباه ، واهتم بدراسة الرياضيات فى صدر شبابه . وتكشف لنا تحليلاته الرياضية عن عبقريته الرياضية ذات الطابع المنطقى .

ويذهب الباحثون على إختلاف مذاهبهم ونزعاتهم إلى أن كتابه « قوانين الفكر Laws of Thought » الذى قام بتدوينه عام ١٨٥٤ — يعتبر أعظم عمل قدمه « بول » للفكر المنطقى منذ بداية القرن التاسع عشر حتى عصر فريجه وبيانو ، وهذا ما جعل رسل يؤكد لنا فى أكثر من موضع أن « التطور الحديث للمنطق الرياضى يؤرخ إبتداء من قوانين الفكر لبول » (١) الذى يعد فاتحة عصر جديد فى تطور الفكر المنطقى فى جانبه الرياضى .

حاول « بول » أن يستفيد من دراسته للرياضيات ، التى اشتغل بها وقتاً طويلا ، فأعمل فكره الرياضى فى المنطق ، ومن ثم فقد وقف على حقيقة مفادها أنه يمكن للمنطق أن يتطور تطوراً جذريا إذا ما كانت لغته دقيقة ، ومصاغة صياغة غاية فى الإحكام والترابط بحيث تسمح للفكر أن يتحرك فى إطارات وأبعاد المنطق مسلحاً بوسيلة فنية قوية تعصمه من الخطأ ، ولهذا فقد حاول « إبتكار لغة رمزية تصلح لتعبر بدقة عما أسماه قوانين الفكر » (٢) ، ولهذا فقد كانت خبرة « بول » الرياضية إلى جانب أعمال الرياضى Wallis خاصة كتابه Institio Logicae (١٦٨٧) وكذلك أعمال « ليبنتز » العظيمة ، من العوامل الهامة التى ساعدت على نضوج تفكيره فى الجانب الخاص بالمنطق الرياضى .

---

(1) Russell, B., Our Knowledge of The External world, PP. 49-50

(2) stebbing. S., Amodern introduction to logic, P. 484

وربما كانت محاولة بول ، في هذا الصدد ، إيذانا بميلاد مرحلة جديدة من مراحل تطور الفكر المنطقي ، ذلك أن الدراسات في مجال المنطق الرياضي لم تحرز أي تقدم منذ عصر « ليبنتز » . فيما عدا تلك المحاولة التي قام بها « لامبرت Lambert » وهذا ما جعل « ڤن » Venn [1] يلقي بتبعية ذلك على كاهل كانط Kant الذي يعتبره مسئولا بصفة مباشرة عن تأخر الدراسات المنطقية .

وعلى هذا الأساس فقد تعين على « بول » أن ينجز جزءاً كبيراً من المنطق الرياضي ، حيث انصب هدفه العام في كتابه « قوانين الفكر » على دراسة « وبحث القوانين الأساسية لعمليات العقل التي ينجزها الاستدلال » [2] من وجهة النظر الرياضية ، وبذا فان بحثه قد إنصب على المبـادىء المنطقية البحتة مما جعل إتجاه بول هـو اتجاه ابناء نسق منطقي رياضي .

ومن بحث « بول » في المنطق ، وجد أن « المنطق يضطلع بنوعين من العلاقات علاقات بين أشياء ، وعلاقات بين وقائع . أما الوقائع فيعبر عنها بقضايا ، وهذا النوع الأخير من العلاقة ، على الأقل بالنسبة لغرض المنطق ، يمكن أن يحال إلى علاقة بين قضايا » [3] . وهذه النقطة بالذات تفسر لنا البدايات الأولى لنظرية حساب القضايا التي ظهرت لدى بول ، فنظرية حساب القضايا في المنطق الرياضي تعتمد على العلاقات القائمة بين القضايا من خلال الثوابت المنطقية Logical Constants ، وهذا ما اهتم به أصحاب المنطق الرياضي في مطلع هذا القرن ، خاصة المنطقي الرياضي الانجليزي برتراند رسل .

---

(1) Venn., Symbolic Logic, P, Xxxii .

(2) Boole, G., Alogical Calculus , ed. in Readings in Logic by Copi, 1964 , P. 198

(٣) المرجع السابق ، ص ٢٠١

وإذا ما تفحصنا أفكار « بول » التى قدمها لنا ، لوجـــدنا أنه ـ تحت تأثير نزعته الرياضية ـ زودنا بثلاث أنواع من الرموز أو العلاقات (٤) هى : —

النوع الأول : — ويتمثل فى الرمـوز الحرفية مثـل X ، Y ، Z وهذه الرموز تمثل الموضوعات odjects التى تنصب عليها تصوراتنا ، أو بمعنى أدق ؛ ووفق تعبير نيل (٥) Kneale ؛ لتمثل الفصول Classes .

النوع الثانى : — يتمثل فى تلك الرموز التى وضعها للعمليات الفكرية مثل : + ، — ، × ، ... والتى يتم عن طريقها اتحاد الأولى فى جمل ذات معنى .

النوع الثالث : — ويتمثل فى رمزه لعـلاقة الذاتيـة Identity ، = ، من حيث أنها علاقه أساسية ، ويستخدمها بين رموز فصلين لكى يدل على أن « فصلين لهما نفس الاعضاء » (١) وهذا ما جعله يميز بين الفصل (٢) واحتواء

(٤) استينج ' المرجع السابق ' ص ٤٨٥

(5) Kneale , W., Poole and the Revival of logic , Mind, Vol-Lvii, No. 226, April 1948 ; P. 161

(١) المرجع السابق ، ص ١٦١

(٢) أثرنا ترجمة كلمه Class باللغه العربية فصل ، لأنها أوثق أتصالا بالمفهوم الرياضى للمصطلح ، وفى هذا فاننـا قد إنتهجنا نهج الاستـاذ يوسف كرم فى تعـريفه للمصطلح بقوله « فى المنطق جملة الموضوعات التى تربط بينها صفات مشتركة ، ويقال على النوع والجنس على حد السواء . ويعرف الفصل إما بالمـا صدق أو المفهوم ، أى أننا قد نعرف نوع الشىء ، الذى هو الفصل أو نوع التصور الذى يدل على الفصل . . فى المنطق الرمزى يكتب هذا الاصطـلاح هكذا « Cls » .

راجع . المعجم الفلسفى ؛ يوسف كرم وآخرون ؛ القاهره ١٩٦٦ ، ص ١٢٢

الفصل Class inclusion ، وعلى هذا الأساس، فقد صيغ حساب أو جبر الفصول، لأول مره بواسطة بول فى جبر المنطق ، [٢] وهذا ما جعله يعالج مسألة الحكم فى القضية من خلال فكرة الفصل .

وقبل أن نتناول نظرية حساب الفصول لدى « بول » يهمنا أن نسجل له موقفا فى غاية الأهمية .

لقد أدرك بول أهمية المنطق الرواقى من وجهة نظر المنطق الرياضى ، وهذه النقطة لم يتناولها أحد من الذين كتبوا عن منطقه . ذلك أنه يذهب فى الحساب المنطقى إلى القول بأنه « حدث للشمس كسوف كلى ، فسنرى الكواكب » . هذا النوع من القضايا فى رأى بول ، يعبر عن علاقة بين قضايا أولية - ونحن نعلم أن المناطقة لم يتناولوا المنطق الرواقى بالبحث إلا فى أواخر القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين . إلا أن بول لم يمض فى تحليلاته لمثل هذا النوع من القضايا إلى نهايتها ، وربما جاز لنا أن نقول أنه لو ألقى بول مزيدا من الضوء على المنطق الرواقى ، لتوصل إلى نظرية حساب القضايا فى صورتها النهائية قبل أن تعرف كنظرية بخمسين عاما على الأقل ، لكنه اعتقادا منه فى اكتمال فكر أرسطو ، ذهب إلى أن « مقدمات أى حكم منطقى تعبر عن علاقة معطاه بين عناصر معينة ، وأن النتيجة يجب أن تعبر عن علاقه متضمنة بين هذه العناصر أو بين جزء منها» [٣] ، وهذا ما جعل رسل [٢] يرى فى منطقه الرياضى تطوراً للقياس الأرسطى .

---

(1) AMBRose Lazerowitz., Fundamentals of Symbolic Logic; PP. 308 - 301

(١) . المرجع السابق . ص ٢٠١

(3) Russell , My : phiLosophical Development ; P. 87

ويمكن لنا أن نقف على بعض نظريات « بول » الهامة فى المنطق الرياضى ، إذا ما حاولنا الربط بين كل من أرائه المعروضة فى أول كتاباته « التحليل الرياضى للمنطق » Mathematical Analysis of logic. الذى ظهر فى عام (١٨٤٧) وأعيد طبعه عام (١٩٤٨) ، والآراء التى طرحها فى قوانين الفكر ، فكلاهما يكمل الآخر .

يميز « بول » بين فكرة الفصل، واحتواء الفصل، كما ويعرف لنا الفصل الكلى Universal Class بأنه « فصل كل الاشياء » ، والفصل الصفرى nullclass بأنه « الفصل الذى عضوه لاشىء » . وقد اشار بول إلى الفصل الكلى بالرمز (1)، ورمز إلى الفصل الصفرى بالرمز (O) .

وعلى هذا النحو فانه يمكننا أن نقدم بعض المفاهيم والافكار الأساسية التى زودنا بها « بول » فى مجال نظرية حساب الفصول على النحو التالى : —

(١) إذا كان A , B أى فصلات فانه إذا قلنا A=B فان هذا يعنى أن أعضاء الفصل A متطابقة مع أعضاء الفصل B .

(٢) إذا قلنا أن $A \subseteq B$ فان معنى هذا أن الفصل A محتوى فى الفصل B ، اى أن أعضاء الفصل A هى ذاتها أعضاء الفصل B . فاذا لم يكن أحد أعضاء الفصل A عضوا فى الفصل B فانه لن يكون من الصادق أن الفصل A محتوى فى الفصل B .

(٣) إذا كان ، b ، فرد Individual ، A فصل ، فان قولنا $b \varepsilon A$ يعنى أن ، b ، عضوا فى A .

(٤) أنه فى حالة إحتواء الفصل، فلا بد من التمييز بين الاحتواء inclusion والإحتواء التام Proper inclusion ويرمز للاحتواء بالعلامة $\subseteq$

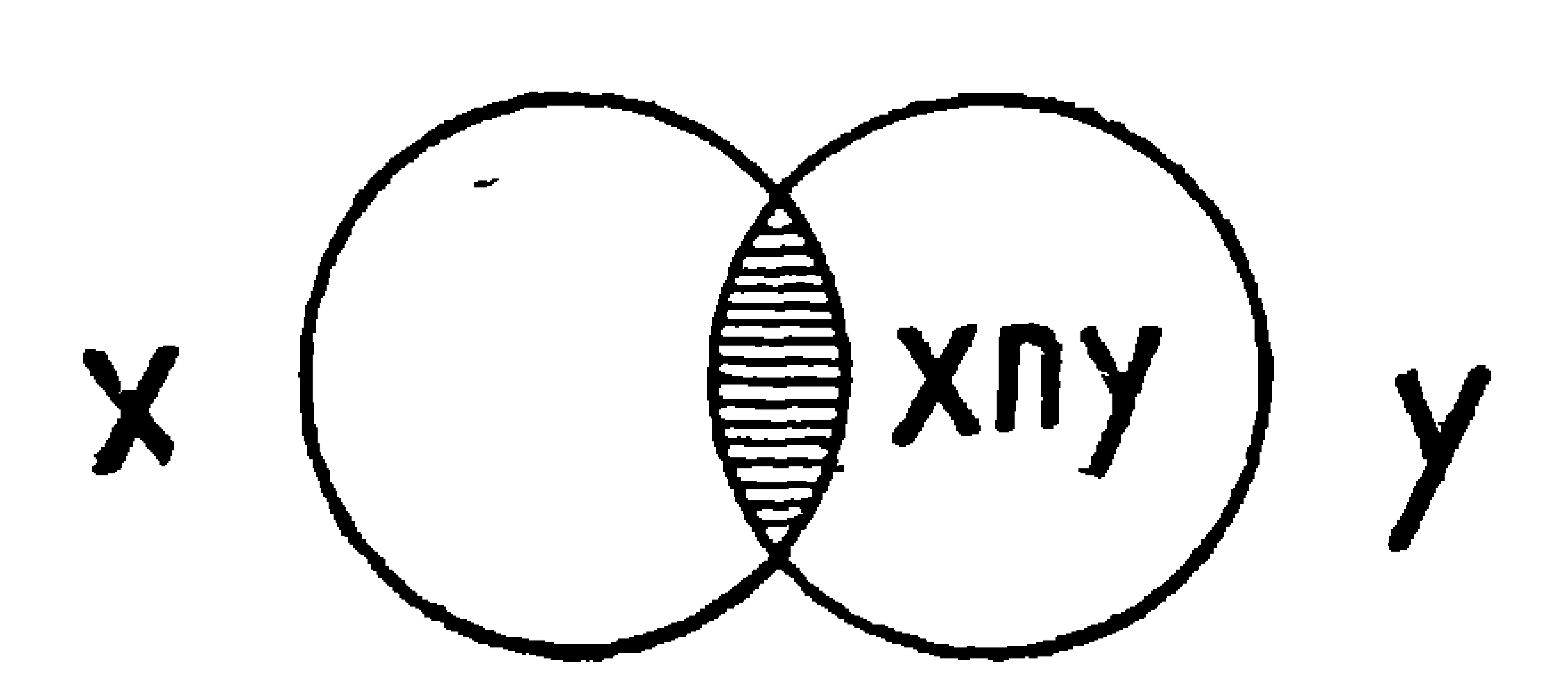
وهناك مجموعة من المفاهيم الأساسية مثل ذاتيـــة الفصل Class Identity واحتواء الفصل . وهذه المفاهيم يمكن وضعها فى حدود Terms عضوية الفصل Class mempership ، فاذا قلنا .

$$A = B$$

فان التطابق هنا يكون فقط فى حالة ما إذا كانت

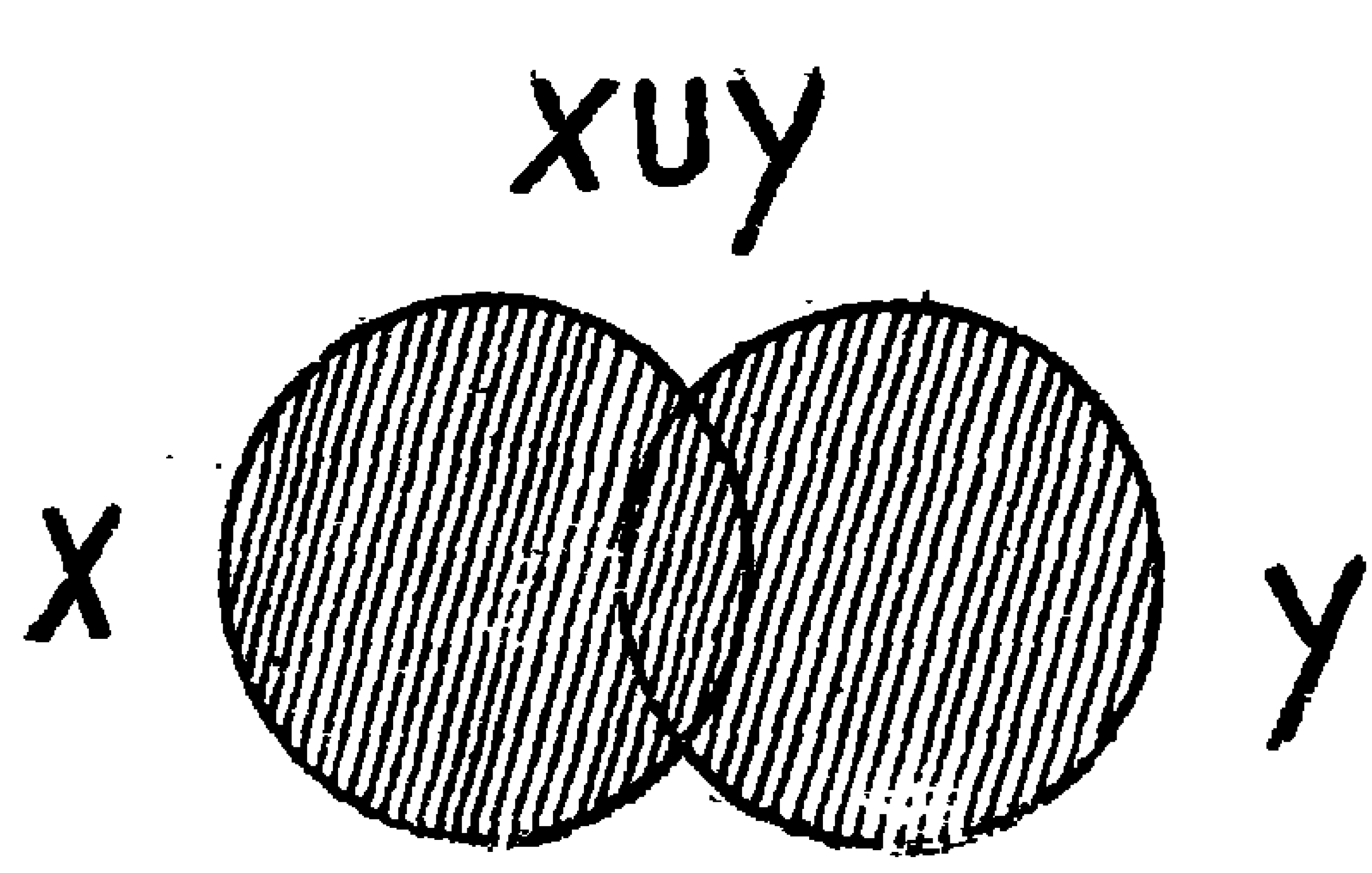
$$(x)\ (x \varepsilon A \equiv x \varepsilon B)$$

(٦) أنه فى حالة تقاطع المجموعتان X , Y كما فى الشكل



والذى تعبر عنه الصيغة ($X \cap Y$) حيث تشير العلامة $\cap$ إلى التقاطع Intersection. وتقرا الصيغة ($X \cap Y$) على النحو التالى «X intersection Y»

(٧) أما فى حالة إتحـــاد كل من المجموعتين X , Y والذى يعبر عنه الشكل الآتى .



فإن الصيغة (X U Y)تعبر عن اتحاد المجموعتين . والعلامه U تشير إلى اتحاد union المجموعتين معا. وتقرأ الصيغه X U Y على النحو التالى « Xuniony »

ويمكن لنا تطبيق فكرتى الإتحاد والتقاطع على صورتى قانون التوزيع وقانون التبادل

أولا : قانون تبادل الحدود The Commutative Law

إذا كان لدينا مجموعتان فرعيتان subsets مثل X , Y لمجموعة كلية (1) universal set فانه يمكن لنا أن نقول

$$X \cup Y = Y \cup X$$

$$X \cap Y = Y \cap X$$

ثانيا قانون توزيع الحدود The distributive Law

إذا كانت لدينا مجموعتان فرعيتان X , Y لمجموعة كلية (1)

فان

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

وكذلك فان

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

وبالنسبه للمجموعة الصفرية null فان

$$X \cup O = X$$

أما المجموعة الكلية universal Set فإن

$$X \cap 1 = X$$

وما يمكن أن نلاحظه يتمثل فى أن أفكار « جورج بول » تجد تطبيقا واسعا فى مجال الجبر algedra .وقد حاول بول فى هذا الصددأن يؤسس ما أسماه بجبر المنطق algebra of logic بالإستناد إلى مجموعةالعلاقات الرياضية والتى وضعها فى صدر مجموعةالافكار الرياضية الاساسيهفى مجال المنطق مثل (+)، (.) ....

والقوانين السابقة يمكن البرهنة عليها من وجهة نظرجبر المنطق لبول ومن ثم فاننا سنكتفى باحدى هذه الصـــور وهى صورتى قانون التوزيع وقانون التبادل لنقف على كيفية معالجة بول لجبر المنطق .

قانون التوزيع

يأخذ قانون توزيع الحدود الصورة الآتية وفقا لنظرية جبر المنطق

$$X . (Y + Z) = X . Y + X Z$$

$$1 - X . (Y + X) = X . Y + X . X$$

$$2 - X . (Y + Y) \quad X . Y + X . Y$$

$$3 - Y . (Y + X) = Y . Y + X . X$$

$$4 - Y . (Y + Y) = Y . Y + Y . Y$$

$$5 - X . (X + X) = X . X + X . X$$

$$6 - Y . (X + X) = Y . X + Y . X$$

$$7 - X . (X + Y) = X . X + X . Y$$

$$3 - Y . (X + Y) = X \quad X + Y . Y$$

نلاحظ على هذه المجموعة من الاحتمالات ما يلى :

أولا : — أن كلا من الاحتمالين (١) ، (٧) متماثلين من ناحية الصورة

ثانيا : — أن الاحتمالين (٣) ، (٨) متماثلين أيضا

<u>قانون التبادل</u>

وصورة هذا القانون هى

$$X + Y \cdot Z = X \cdot Y + X \cdot Z$$

من هذه الصوره يمكن أن نستنتج الاحتمات الآتية

$$1 - X + Y \cdot X = (X + Y) \cdot (X + X)$$

$$2 = X + Y \cdot Y = (X + Y) \cdot (X + Y)$$

$$3 - Y + Y \cdot X = (Y + Y) \cdot (Y + X)$$

$$4 - Y + Y \cdot Y = (Y + Y) \cdot (Y + Y)$$

$$5 - X + X \cdot X = (X + X) \cdot (X + X)$$

$$6 - Y + X \cdot X = (Y + Y) \cdot (Y + X)$$

$$7 - X + X \cdot Y = (X + X) \cdot (X + Y)$$

$$8 - Y + X \cdot Y = (Y \quad X) \cdot (Y + Y)$$

نلاحظ أيضاً على هذه الاحتمالات الثمانية أن كلا من الحالتين (١) ، (٧) متماثلتين ، كما أن الحالتين (٣) ، (٨) متماثلتين أيضا .

تلك هى بعض الأفكار الأساسية التى تضمنتها آراء بول فى المنطق الرياضى، خاصة جبر المنطق، والتى تابع تطويرها الرياضى الألمانى شرويدر متابعا بول فى نزعته الجبرية فى المنطق .

ومما لا شك فيه أن آراء بول كانت « بمثابة حلقة هامة من حلقات تطور الفكر المنطقى فى جانبه الرياضى كما سبق أن ذكرنا ، أتاح للمناطقة المعاصرين امكانيه معالجة وتطوير أبحاث المنطق بما وضعه ـ فى أحدث صوره ، من تطوير جبرى ورمزى لمسائل المنطق .

٨ — بيـــانو

أما بيانو (١) Peano فيكشف لنا فكره عن عبقرية أصيلة ، لمّا أمتازت به تحليلاته الرياضية والمنطقية من عمق . وقد تأتى بيانو إلى دراسة المنطق عن

---

(١) هو جيوسيب بيانو Cuiseppe Peano العالم الرياضى والمنطقى الايطالى . ولد فى ٢٧ أغسطس ١٨٥٨ واهتم بدراسة أسس الرياضيات وأصولها ، وعمل على تطوير لغة المنطق الصورى وأبحاثه المختلفة .وقدشغل كرسى الاستاذية فى حساب اللامتناهى infinitesimal Calculus بجامعه تورين فى عام ١٨٩٠ وقام بتدريسه فى الا كاديميه العسكريه فيما بين الاعوام (١٨٧٧ – ١٩٠١) . ومن أهم كتاباته « الصيغ الرياضية » Formulaire de mathématique التى اشترك فى اعداده معه مجموعة من تلامذته فيما بين الاعوام (١٨٩٤ – ١٩٠٨)والتى يعرض فيه المفاهيم والمسلمات الاساسيه فى أصول الرياضيات والتى أصبح السند الأساسى لرسل فيما بعد حين قام بتدوين أصول الرياضيات (١٩٠٣) ثم « مبادىء الرياضيات» بالأشتراك مع هوايتهد (١٩١٠ –١٩١٣) . وقد توفى بيانو فى ٢٠ ابريل ١٩٣٢ .

الرياضيات التى أهتم بفحص أسسها ومبادئها محاولا صياغتها صياغة جديدة تلائم التطورات العلمية والكشوف الرياضية الحديثة .

والباحثون فى مجال المنطق الرياضى ، لم يتبينوا أهمية بيانو وعظمة فكره ، إلا بعد أن كشف رسل النقاب عن أعماله الهامة فى مجال المنطق البحت والمنطق الرياضى وفلسفة الرياضيات ، وذلك بعد أن إلتقى به فى مؤتمر باريس الرياضى الذى عقد فى عام (١٩٠٠) وحضره رسل مع أستاذه وزميله هوايتهد whitehead .

أراد بيانو - تحت تأثير الرياضيات - أن يضع نظاما دقيقا ومحكما للمنطق من خلال مصطلحاته الرمزية ، فضلا عن محاولته التى قام بها لرد الرياضيات إلى أصول منطقية بحته Pure logical axioms ، تلك المحاولة التى أعتبرت بمثابة التكأة التى أنطلق منها أصول الرياضيات ، (١٩٠٣) لرسل ، ثم « مبادىء الرياضيات » Principia Mathematica لرسل هوايتهد .

والحقيقة أن أصالة بيانو المنطقية ، أتاحت له أن ينطلق فى حركته المنطقية إلى أبعاد التجديد المنطقى الشامل ، فنجده يتناول الكثير من أفكار ومبادىء المنطق التقليدى بالبحث والتمحيص ، من ناحية ، فضلا عن أنه دفع إلى التصور المنطقى بعض المفاهيم الرياضية والمنطقية الحديثة مما أدى إلى تدعيم الاتجاه اللوجستيقى المعاصر .

ومن ثم فانه يمكننا أن نعالج فكر بيانو من زوايا ثلاث مختلفة ، الزواية الأولى وتتمثل فى موقفه من المنطق الصورى بمعناه التقليدى ومعالجته لنسق القضايا الأساسية فى المنطق. أما الثانية فتنصب على موقفه العام من المنطق الرياضى وأهمية هذا الموقف بالنسبة للمعاصرين . والموقف الثالث يتضمن عرضاً لموقف بيانو من أصول الرياضيات ومجهوداته فى هذا الصدد .

أولا : موقف بيانو من المنطق الصورى التقليدى

نحن نعلم أن المنطق الصورى الأرسطى ، ظل الشكل الرسمى للفكر المنطقى منذ أرسطو وحتى أواخر القرن التاسع عشر ، ولم تكتب لمحاولات الخروج على المنطق الأرسطى ، النجاح إلا فى عصرى بيانو وفريجة . فلم تكن الاعتبارات التى قادت ليبنتز وجورج بول إلى حركة التجديد المنطقى وادخال نمط من انماط الفكر الرياضى إلى ميدان المنطق دون محاولة الذهاب إلى ما وراء النسق المنطق التقليدى .

لكنه يمكننا أن نسجل لبيانو أول موقف منطقى حاد من المنطق الصورى الأرسطى ، ذلك أن موقفه العام من معالجة الأسس المنطقية التى يستند إليها التصور التقليدى قد أتاح له الفرصة لتطوير المنطق الصورى الحديث أو ما يسمى بالمنطق الرياضى .

ومع هذا فلم ينتبه الباحثون فى ميدان المنطق إلى أهمية موقف بيانو من المنطق إلا بعد أن ألقى رسل ضوءاً على مجهودات بيانو فى هذا المضمار ، فى مؤلفه الذى أصدره فى عام (١٩٠٣) بعد مؤتمر باريس الرياضى ، الذى يحمل عنوان « أصول الرياضيات Principles of Mathematics . أفرد رسل جزءاً كبيراً فى هذا المؤلف لمعالجة موقف بيانو المنطقى ، والحقيقة أن بيانو ، كما يذهب إلى ذلك رسل ، يميز تمييزاً حاسماً بين القضية الحملية والتى صورتها « سقراط » والقضية العامة ذات الصورة « كل الاغريق فانون » . ونحن نعلم أن المنطق التقليدى لا يضع تمييزاً بين صور القضايا الحمليه الاربعة . ذلك أن أرسطو كما سبق أن أشرنا إلى ذلك ونحن بصدد معالجة موقفه من المنطق ، قد انتهى إلى اعتبار صور القضايا الأربعة هى بمثابة أبسط الصور والتى تعد أساساً للفكر والنظر المنطقى

لكن دقة بيانو المنطقية ومهارته الرياضية، تمثلت فى التمييز الحاسم والدقيق بين كل من هاتين الصورتين فبينما أفترض المنطق التقليدى أن القضية الجزئية والقضية الكلية تنطويان على تقرير وجودى لأفراد الموضوع[1] ، ذهب بيانو ، إلى أن الصورتين متمايزتين ، وقد أغفل المنطق التقليدى التمييز بينهما .

فالقضية التى نقرر فيها أن « سقراط فان » إنما هى فى واقع الأمر تنسب محمولا لموضوع مسمى[2] وهى مايمكن أن نسميه بالقضية الحملية Categaircol أو Proposition القضية ذات صورة الموضوع والمحمول « Subiect-predicate »، على حين أن القضية التى تقول فيها أن « كل الاغريق فانون انما هى فى حد ذاتها قضية تعبر عن علاقة بين محمولين « إغريق » ، « فانون » ، أو هى تلك التى تعبر عن علاقه بين قضيتين . فكلمة « إغريق » فى هذه القضية هى محمول أيضا ، شأنها فى ذلك شأن كلمة « فانون » تماما . وهذه القضية يمكن لنا تفسيرها على النحو التالى .

« إذا كان س اغريق ، فإن س فانون »

أى أنه إذا ما حملنا صفة الإغريق على س فانه لابد لنا وأن نحمل عليه أيضا صفه كونه فان .

وعلى هذا الأساس فان القضية العامة أو القضية والتى نظر اليها أصحاب المنطق التقليدى على أنها قضيه حملية ، إنما هى فى حقيقتها تعبر عن علاقة بين دالتى قضيتين، أو بتعبير أدق هى قضية شرطية متصلة Hypothetical Conjunction فى صورة تضمن iplication .

---

(1) **Mouraut , I. , Formal** logic , P. 212

(2) Russell, B , My Philosophical deveļopment, P. 66

وإدراك بيانو ، لهذا التميز الدقيق بين كل من صورتى القضية الحملية والقضية العامة ، هو الذى اتاح للمناطقة المحدثين ، أن يفترضوا أن القضية الجزئية وحدها ، هى التى تتضمن تقريرا وجوديا لأفراد الموضوع ، على حين أن القضية الكلية أي العامة لا تتضمن أى تقرير وجودى لأفراد الموضوع (٢) .

ومما لاشك فيه أن رسل قد وقف على تميز بيانو هذا بصورة واضحة واستفاد منه فى معالجته لأسس المنطق التقليدى. ومع هذا فلم يكن لرسل فضل السبق فى هذا التمييز ، بل سبقه اليه برادلى فى « مبادىء المنطق » ، لكن برادلى لم يتمكن من الاستفادة من كشفه هذا ، بينما تمكن رسل من تطوير المنطق فى جانبه الرياضى من خلال تمييزه هذا.

ثانيا موقف بيانو من المنطق الحديث (١)

إذا كان بيانو قد عالج لنا جانبا هاما من جوانب المنطق التقليدى فانه زودنا فى الجزء الخاص بالمنطق الحديث ببعض التصورات الهامة التى دفعت بعجلة التطور فى المنطق . وقد قدم لنا رسل موقف بيانو كما قلنا كاملا فى « أصول الرياضيات » ثم تناوله بعد ذلك فى « مقدمة لفلسفة الرياضة » ، وقد اعتمدت كل الكتابات المنطقية التى جاءت بعد « الأصول » على أفكار رسل عن منطق بيانو ، ومن ثم فإننا سنعتمد على عرض رسل لأفكار بيانو فى هذا الصدد.

وضع بيانو خمسة مبادىء أساسية يعتمد عليها النسق الاستنباطى فى المنطق وهذه المبادىء الخمسة هى :

---

(٢) مورانت ، المرجع السابق ، ص ٩١

(١) راجع : Russell. B., The Principles of Mathematis
بنود ٣١ ، ٣٢ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦

(١) مبدأ التبسيط

وفيه يقرر أن الحكم الاقتراني لقضيتين يتضمن الحكم بأولى القضيتين . أى أنه إذا كان لدينـــا قضيتين ل ، م ، فانه إذا كانت ل تتضمن ل ، وكانت م تتضمن م فان ل م تتضمن ل .

(٢) مبدأ القياس

إذا كان ل تتضمن م ، م تتضمن ن . ، فان ل تتضمن ن

(٣) قاعدة الاستيراد

إذا كانت م تتضمن م ، ن تتضمن ن ، وكانت ل تتضمن أن م تتضمن ن ، فان ل م تتضمن ن .

(٤) قاعدة التصدير

إذا كانت ل تتضمن ل ، كانت م تتضمن م ، ومن ثم فانه إذا كانت ل م تتضمن ن ، فا ، ل تتضمن أن م تتضمن ن .

(٥) قاعده التركيب

وتقرر هذه القاعـــدة أن كل قضية تتضمن قضيتين ، فـان القضيتـين معا ينتجـان عن القضية الأصلية . فاذا كانت ل تتضمن م ، وكانت ل تتضمن ن ، فان ل تتضمن م ن .

لكن بيانو لم يقف عن وضع هذه المبادىء أو القواعد الأساسية للاستنباط بل تعدى هذه الخطوات إلى تناول نظرية الفصول بالبحث فكان أول من رمز إلى

الفردوالفصل الذى ينتمى إليه بالرمز ε ، وقد كان تمييزه هذا بمثابة خطوة جادة نحو التمييز بين علاقة الفرد بالفصل وعلاقة الكل بالجزء بين الفصول ، وهذا ما جعل رسل [١] يشيد بتمييزه هـذا الذى أزال ما أكتنف الخلط الذى أصاب المنطق التقليدى بين هذين النوعين من العلاقات، فالفرق بينهما أساسى تماما كالفرق بين علاقه الفرد بالنوع وعلاقة النوع بالجنس ، كما وقـد أتاح له الفرصة بأن يؤكد لنا « الفصل الذى يتكون من عضو واحد ليس متطابقا مع هذا العضو » [٢].

ويعتمد النسق الاستنباطى الذى قدمه لنا بيانو على مجموعه أساسية من اللامعرفات والتى تدخل ضمن الجهاز الاساسى للنسق الاستنباطى وهى :

١ — الفصل .

٢ — علاقه الفرد بالفصل الذى هو عضو فيه .

٣ — فكرة الحد .

٤ — التضمن الصورى

٥ — أثبات قضيتين معا

٦ — فكره التعريف

٧ — سلب القضية .

وإلى جانب هذه المجموعة من اللامعرفات وضع لنا مجموعة من القضايا الأصلية [١] التى أعتبرها كبديهيات وهى : —

---

(١) برتراند رسل ، أصول الرياضيات ٢ بند ٢١

(٢) Russell, B., My Philosophical Development, P. 67

(١) برتراند رسل ، أصول الرياضيات . بند ٣٢

١ ـ اذا كانت س ترمز إلى الفصل ، و ، ل ترمز ان لعضو ينتميا فى الفصل فإن « و هى س » ، « ل هى س » ، أى أن كلا من و ، ل ينتميان إلى الفصل س .

٢ ـ اذا كان س ، ص فصلان ، فانه اذا قلنا « كل س هى ص » يعنى أن « س هى و تتضمن أن س هى ل » .

٣ ـ اذا كان س ، ص ترمزان إلى فصول ، فان حاصل الضرب المنطقى لهما يتكون من الأفراد التى هى أعضاء فى الفصلين س ، ص ، أى فى الفصل س ص .

٤ ـ أن الفصل الصفرى هو « حاصل ضرب أى فصل فى سلبه » [١] . أو هو فصل الحدود التى تدخل فى كل فصل . فالفصل الصفرى إذن هو فصل الحدود التى تدخل فى كل فصل . ورغم أن بيانو قد ميزلنا بوضوح فكرة الفصل الصفرى إلا أن موقفه يكتنفه بعض الغموض لأنه على حد قول رسل [٢] يوحد بين الفصل و الفصل النصور ، وهذا ما أفضى إلى توحيده بين تساوى الفصول المشتملة على نفس الحدود ، وبين تطابقها ، وهذا أمر غير مشروع اذا ما إعتبرنا الفصل ، فصل تصور .

وربما كان أهم نقد وجهة رسل[٣] إلى الجهاز الاستنباطى المنطقى لبيانو يتمثل فى توحيد بيانو بين كل من التضمن الصورى والتضمن المادى ، بينما وجد رسل أنه من الضرورى التميز بينهما تماما،وقد كانت تلك هى مهمة رسل الإساسية فى جهاز الاستنباط الأساسى لمبادىء « الرياضيات» .

---

(١) المرجع السابق ، بند ٣٦

(٢) المرجع السابق ، بند ٦٩

(٣) المرجع السابق ، بند ٣٢ . راجع أيضا نظرية حساب القضايا فى هذا المؤلف .

ثالثا : موقف بيانو من فلسفة الرياضيات

لاشك ان بيانو إهتم بصفة خاصة بأصول الرياضيات التى شغل بتأسيسها فترة طويلة ، وهذا ما جعله يحيل كرسى الاستاذية فى «حساب اللامتناهى» بجامعة تورين . وقد أشاد رسل بموقفه فى « مقدمة لفلسفة الرياضية » (١٩١٩) .

ومن ثم فاننا سنحاول ونحن بصدد عرض موقف بيانو ، أن نقدم بعضا من الافكار الأساسية التى تعد نقطة بداية فى أصول الرياضيات ، من خلال ما كتبه رسل عنه(١) .

النقطة الأساسية التى يبدأ بها البحث فى فلسفة الرياضيات واصولها تتمثل فى محاولة الوصول إلى أقل عدد ممكن من الأفكار والتعاريف الأساسية التى تعتبر بمثابة أصول الاشتقاق، بحيث تسمح لنا باشتقاق أو استنباط deduce الرياضيات بأسرها منها ، وبمعنى آخر يدور البحث حول الأسس المنطقية Logical basis للرياضيات. وقد إضطلع بهذه المهمةفى مبدأ الأمر، بيانو، ثم أمكن رد الرياضيات باسرها إلى المنطق فى « مبادىء الرياضيات » ، لرسل وهوايتهد .

وضع بيانو مجموعتين من أصول الاشتقاق ، تتضمن المجموعة الأول منها ثلاثة أفكار ابتدائية Primitive Ideas هما :

١ ـ الصفر « O »

٢ ـ العدد Number

٣ ـ التالى Successor

---

(1) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, ch. i, ch. III

أما المجموعة الثانية فتشتمل على خمس قضايا ابتـدائية Primitive Propositions هما :

١ - أن الصفر عدد .

٢ - أن تالي أي عدد هو عدد .

٣ - ليس لعددين نفس التالى .

٤ - أن الصفر ليس تالى لأى عدد .

٥ - أن أى خاصة Property من خواص الصفر هى بالضرورة خاصة لجميع الاعداد .

انه إذا ما نظرنا فى مجموعتى أصول الاشتقاق التى وضعها بيانو ، لوجدنا أنه يميز تمييزاً واضحا بين كل من متسلسلة الأعداد الصحيحة ومتسلسلة الأعداد الطبيعية[١].

لكن كيف يمكن اشتقاق نظرية الأعداد الطبيعية من الأصول التى وضعها بيانو واعتبرها بمثابة أصول الاشتقاق ؟

البرهان على هذا يسير وفق الخطوات التالية .

بواسطة القضية الإبتدائيه رقم (٢) والتى تنص على أن تالى أى عدد هو عدد، فإن العدد (١) هو تالى الصفر ، العدد (٢) هو تالى الواحد ، والعدد ٣ هو تالى العدد ٢ ، والعدد (ں + ١) هو تالى العدد ں . . . الخ (١)

---

(١) تبدأ متسلسلة الاعداد الصحيحة بالاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . الخ ، أما متسلسلة الاعداد الطبيعية ، وهى ما يبدأ به الرياضى فهى ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ . . . ں ، ں + ١ ، ں + ٢ ، . . . الخ . ويؤكد رسل أن اضافة الصفر ، انما هى اضافة حديثة ، لأنه لو تمنى القدماء معرفة أن الصفر عدد لأمكن تطوير الرياضيات إلى أبعد مما هى عليه الآن .

راجع : رسل . « مقدمة لفلسفة الرياضية » ص ٣

رقم (٣) والتى تنص على أنه « ليس لعددين نفس التالى » فانه من الواضح أننا لم نصل فى خطوتنا السابقة إلى تالى واحد لعددين ⟵ (٢)
وبواسطة القضية رقم (٤) والتى تنص على أن « الصفر ليس تالى أى عدد » يتضح لنا أننا فى طريقة البرهان رقم (١) لم نصل إلى الصفر كتالى لأى عدد ⟵ (٣) .

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) يمكن أن نصل فى البرهان إلى ما لا نهاية وتصبح المتسلسلة على النحو التالى :

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ن ، ن + ١ ، ن + ٢ ، ... ∞ [1] .

إلا أن برهان بيانو ، على هذا النحو ، لقى كثيراً من النقد على يدى رسل الذى يعتبره موقفا أوليا فى الإشتقاق وليس نهائيا فى الرد ، لان كل من « الصفر » ، « العدد » ، « التالى » تقبل عدداً لانهائيا من التفسيرات المختلفة .

ورغم أن بيانو قد وضع لنا الأفكار والقضايا الابتدائية التى تساعدنا على إشتقاق الرياضيات بأسرها من المنطق ، إلا أنه لم يتمكن من رد الرياضيات إلى المنطق بصفة نهائية ، وقد كانت تلك مهمة رسل وهوايتهد فى مبادىء الرياضيات ، بحيث أضحت الرياضيات بأسرها منطق ، وبات من المتعذر على الذهن التحليلى أن يتبين أين ينتهى المنطق وأين تبدأ الرياضيات .

---

(١) العلامة « ∞ » ترمز إلى اللانهاية ، أى أننا نسير فى متسلسلة إلى ما لا نهاية له من الأعداد .

٩ — فريجة والاتجاه اللوجستيقى

أما إذا إنتقلنا إلى فريجه [١] وبحثنا موقفه من المنطق بصفة عامة ، والمنطق الرياضى بوجه خاص، لوجدنا أنفسنا أمام عقلية ضخمة تعبر بحق عن أصالة الروح الجرمانية منهجا وموضوعا . فهو سليل ليبنتز وكانط وهيجل فى الدقة وعظمة البناء . وقف على أعمال السابقين عليه واستوعب نظرياتهم وآراءهم ، فنقد بعضها وأضاف إلى البعض الآخر إضافات جديدة، وهذا ما حدا بالباحثين على إختلاف إتجاهاتهم أن يعتبروه بحق مؤسس المنطق الحديث [٢] ، بل إننا نجد كريستيان ثيل Christian Thiel ؛ وهو من أئمه الباحثين فى فكر فريجة ، يذهب إلى أن فريجه لم يترك فى المنطق من ورائه شيئاً ليقوله أحد .

---

(١) جوتلوب فريجه Gottlob Frege (١٨٤٨ - ١٩٢٥) من أكبر الرياضيين الألمان فى النصف الثانى من القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين . إمتاز بعقلية رياضية منطقية ، واضطلع بتطوير جزء كبير من أبحاث المنطق الرياضى ،خاصه فيما عرف بالمذهب اللوجستيقى الذى تبلور فى صورته النهائية فى « مبادىء الرياضيات » Principia Math-ematica (١٩١٠ — ١٩١٣) الذى اشترك فيه رسل وهوايتهد. ومن أهم أبحاث فريجه «أسس الحساب» (١٨٤٨) Die Grundlagen der Arithmetik ، «الداله والتصور» (١٨٩١) Function und Begriff ، و «القوانين الأساسيه لعلم الحساب » (١٨٩٣) Grundgesetze der Arithme ، و «الفكر : بحث منطق » (١٩١٨— ١٩١٩) Der Gedanke : Eine Logische untersuchung . هـذا إلى جانب العديد من المؤلفـات الأخرى والتى يتوجها جميعـا كتابه الأشهب فى « التصورات » (١٨٧٩) Begriffsschrift .

(2) Thiel, Christian, Sense and Reference in Frege's Logic, P.8
ونحن نعتبر مؤلف « ثيل » هذا إلى جانب ماكتبه رسل فى الملحق الخاص بأصول الرياضيات عن فريجه ، من المراجع الأساسية للوقوف على موقف فريجه من ابحاث المنطق والرياضيات.

والحقيقة أن فريجة يعتبر حلقة هامة من حلقات التطور فى تاريخ المنطق والرياضيات على سواء ، رغم أن الباحثين من المناطقة والرياضيين لم يتنبهوا إلى عبقريته وأصالته إلا بعد أن كشف رسل النقاب عن جوانب فكره فى الملحق الخاص الذى ذيل به كتابة الأشم « أصول الرياضيات » (١٩٠٣) حيث تناول فكر فريجة من حيث المنهج والموضوع ونقاط الأصالة والنسق الاستنباطى ، وتصحيحة لبعض المواضع فى المنطق الصورى الأرسطى .

وينبغى أن نشير إلى أن معظم الباحثين ، وهم بصدد حركة التأريخ للمنطق الحديث لم يعتنوا بفريجة وأبحاثه ، الأمر الذى أفضى بالرياضيين إلى إهماله بالتالى . لكن بعد أن قدمه رسل للمفكرين ، وبعد أن نقل « ماكس بلاك » Max Black أكثر أعماله من الألمانية إلى الإنجليزية ، أضحت أعمال فريجة سهلة ويسيرة إلى حد كبير . ومع هذا فقد تطلب عرض منهج فريجة ودراساته ، تحليلا وتركيبا ومقارنة ؛ سنوات طويله ، كان حصيلتها بحث أصيل للمنطقى الرياضى « كرستيان ثيل » .

لقد بلغت أبحاث فريجة المنطقية أوجها فى وقت وقف فيه المناطقة فى مفترق الطرق بين التقليدية والعلمية ، فلا الرياضيون قادرون على تخطى النسق المنطقى التقليدى ، ولا التقليديون قادرون على تجاوز الأصل الأرسطى إلى ما هو جديد ، اللهم إلا فى مواضع طفيفة . وما نؤكده هنا لأول وهلة ، أن فشل الإتجاهين معا فى تخطى المنحنى الحرج إلى نقطة الانقلاب Zero Point فى المنطق ، *إنما يرجع أساساً إلى سيطرة المنطق المثالى ، بزعامة برادلى ، آنذاك على دوائر* الفكر المنطقى .

حمل فريجة الدعوة إلى الاتجاه اللوجستيقى بكل وضـــوح فى كتاب « التصورات » (١٨٧٩) حيث تمكن من خلال اتجاهه لتجديد فى [illegible]

والرياضيات معا ،من أن يزود أجيال المناطقة والرياضيين بأربعة تصورات أساسية :

١ — تصوره لإطار نظرية حساب القضايا .

٢ — تصوره لفكرة دالة القضية .

٣ — تصورة لفكرة السور quantifier واستخدامها استخداما حديثا بحيث أصبحت بالاضافة إلى فكرة دالة القضية تكون التصور الأساسى لنظرية حساب المحمول .

٤ — التحليل المنطقى للبرهان عن طريق الإستقراء الرياضى باستخدام فكرة الفصل Class .

ولكننا فى عرضنا لموقف فريجة سنركز على موضوعين أساسيين : الاول ؛ موقف فريجة من أسس المنطق الصورى وأبحاثه ، الثانى ؛ موقفه من أسس النسق الاستنباطى ونظرية حساب القضايا .

أولا : موقف فريجة من أسس المنطق الصورى وابحاثه

نعلم من دراستنا لتاريخ المنطق أن أصحاب المنطق التقليدى والمشايعين للنزعة الإرسطية ، والتقليديون من المناطقة حصروا متن أبحاثهم فى المنطق فى القضية ذات صورة الموضوع ـ المحمول ، ومن ثم فقد رأوا أن كل قضية تشتمل بالضرورة على حدين مرتبطين بفعل الكينونه (To Be) . فصورة القضية « سقراط إنسان » تنحل بالضرورة إلى ثلاث مكونات؛

١ — الموضوع « سقراط »

٢ — المحمول « إنسان »

٣ — الرابطة [1] Copula ، بين الموضوع والمحمول ، « يكون » .

وقد حاول التقليديون رد الصور الأخرى للقضايا إلى صورة القضية الحملية ، ولم يتبينوا أن هناك ثمة فروق جوهرية بين كل من القضية الحملية والقضية العامة مثلا . لكن فريجة استطاع بدقة تحليلاته المنطقية أن يكتشف لأول مرة فى تاريخ المنطق تميز صورة القضية الحملية من القضية العامة [٢] . ذلك لأننا فى القضية الحملية نقرر assert ، أما فى القضية العامة مثل قولنا « كل إنسان فان » فإننا لا نقرر الوجود لأفراد الموضوع ، بل نكون بصدد الحكم judgement على كل أفراد الموضوع بالفناء ، ومن ثم فان القضية « كل إنسان فان » تفسر على النحو التالى « اذا كان س إنسان فإن هذا يتضمن بالضرورة أن س فان » . من هنا توصل فريجه إلى نقطتين فى غاية الأهمية بالنسبة لأبحاث المنطق ، الأولى ؛ أن صورة القضية العامة فى جوهرها إنما هى شرطية متصلة ، والثانية ؛ أن هناك تمييز حاسم بين التقرير assertion والحكم . وهذا ما جعله يميز بين محتوى content الحكم وتقريره . ولذا وجدنا رسل يؤكد لنا أن فريجه يميز بين ثلاثة عناصر .

---

(1) Stebbing, S., A Modern Introduction to logic, P. 34.

(٢) صورة هذه القضية فى اللغه الانجليزية « Socrates is aman » . الرابطة بين الموضوع والمحمول هنا يعبر عنها بفعل الكينونه « is » ، وهى لا تظهر فى اللغه العربيه الا بصوره ضمنية . لمزيد من التفصيل فى معرفه المعنى الذى تستخدم به الرابطه ، يرجع إلى كتاب « الفلسفة ومباحثها » للدكتور محمد على أبو ريان ، « وأصول الرياضيات » لبرتراند رسل ، الجزء الأول والسابع .

(3) Stebbing . op. cit, p. 40

ونشهد « أستنبج » رأى « رسل » بأن فريجه أدرك هذا التمييز مستقلا عن بيانو وفى نفس الوقت الذى عرف فيه بيانو الاختلاف بين الصورتين .

أساسية فى إطار نظرية الحكم هى (١) :

١ — معرفه الصدق Truth

٢ — الفكر (Gedanke) Thought

٣ — قيمة الصدق (٢) Truth - value

والحقيقة أن تمييز فريجة الحاسم بين مسأله التقرير والحكم يفضى بنا إلى بحث موقفة العلم من بعض المواضع فى المنطق بصفة عامة . وقد أهتم فريجة بهـــذه المسأله فى المقالة التى كتبها بعنوان « الفكر : بحث منطق » حيث أكد لنا ما سبق أن أورده من أفكار فى كتاب « التصورات » الذى تبنى فيه الدعوة لرفض كل اتجاه سيكولوجى فى المنطق أو علم الحساب .

يرى فريجة أنه اذا ما نظرنا للنطق وقوانينه بالمنظور التقليدى ، فان هـذا سيفضى إلى خطورة شديدة وصعوبات عديدة تكتنف كل أبحاثه ، لإن هذا سيعنى بالضرورة أن يكون المنطق فن التفكير الصحيح . وبالتالى تصبح القوانين المنطقية بمثابة المرشد للفكر فى الحصول على الصدق (٣) . ومن ثم وجدنا فريجة يذهب إلى التميز بين الموضوعات الخارجية أو الاشياء objects والتصورات Concepts

---

(1) Russell. B., The Principles of Mathematics; Appendix A,p. 477

(2) Anscombe, G. 2 ., An Introduction to Wittgenstein's, Tractatus P. I4 وتشير « أنسكومب» إلى أن أجيال المناطقة حتى يومنا هذا يدينون بالفضل لفريجة فيما يتعلق بمفهوم معين (قيمه الصدق) ، وهى تتفق فى هذا الرأى مع ما ذهب إليه رسل فى أكثر من موضع من كتاباته .

(3) Thiel, C., op. Cit, P. 22

فنحن نستطيع أن نتحدث عن الاشياء ونطلق عليها اسماء names ، أى نسميها . أما التصورات (١) فهى تتطلب موضوعا تملأه ، وبالتالى فإن التصورات أقل كما لا من الأشياء ، والتصور هو ما يكون محمولا وفق مذهب فريجه المنطق لا أن يكون موضوعا . ومن المعروف أن موقف فريجة هذا قد أثر ، فيما بعد ، فى أجيال المناطقة والفلاسفة على السواء خاصه رسل وفتجنشتين وكارناب Carnap .

لكن كيف نميز الأفكار thoughts عن الاشياء الموجودة فى العالم الخارجى فى إطار مذهب فريجة المنطق ؟

يقيم فريجة (٢) أربعـة تمييزات أساسية بين الافكار والأشياء :

أولا : أنه لا يمكن لنا رؤية الافكار أو لمسها أو تذوقها أو شمها ، على حين أن الأشياء تتمتع بهذه الخواص جميعا .

ثانيا : أن الفكرة التى تكون لدى فرد ما تنتمى بالضرورة إلى محتوى الشعور الخاص بهذا الفرد وحده ولا يمكن أن تكون بنفس الدرجة لدى أى فـرد آخر .

ثالثا : أن الافكار Ideas تحتاج إلى حامل bearer ، أما الاشياء الموجودة فى العالم الخارجى فهى مستقله تمام الإستقلال عن هذا الحامل لأنها قائمة بذاتها ،

---

(١) وفى كثير من المواضـع يستخدم فريجه كلمه (الدالة) Function بـدلا من التصور Concept .

(2) Frege, G ; Thought : Alogical Inqniry . pp. 26 -28, trans. by A. M. and Marcelle Quinton, ed. in "Philosophical Logic" by. P. F. Strawsen.

ومن ثم فانه اذا ما كانت لدى فكرة ما عن شيء معين فان هذه الفكرة فى حد ذاتها تختلف عن فكرة أى شخص آخر عن نفس الشيء .

رابعا : أن كل فكرة من الأفكار لها حامل واحد فقط ، فليس لشخصين نفس الفكرة .

وقد استخدم فريجة فكرته الاساسية عن تمييز الاشياء من التصورات فى نظرية المعنى والدلالة ، لكن رسل [1] ، وقد اهتم بعرض موقف فريجة فى نظرية الدلاله ونقده ، أثار بعض الصعوبات الخاصة بموقف فريجة فيما يتعلق بنظرية العدد number وإقامة علم الحساب . ويمكن القول بأن ما وجه إلى فريجة من نقد لرسل أو فتجنشتين أو غيرهم من المناطقة ينحصر فى نقطتين :

النقطه الأولى : أن فريجة كان يتحدث عن التصورات ، ومن ثم فقد كان مضطرا لان يفترض أن كل تصور له موضوع خاص به ومرتبط به ويمكن اعتباره كموضوع فقط حين نتحدث عن التصور .

النقطه الثانية : أن تصور الموضوع الخارجى وفق مذهب فريجة لا يتفق تماما مع نظريته التى أقامها فى المعنى والاشارة Sense and Reference والتى تعد إمتدادا لنظرية الموضوع - المحمول .

---

(1) Russell, B., On Denoting, P. 45 ff. ed. in "Logic and Knowledge" by R.C, Marsh.

وأيضا :

Wittgenstein, L., Tractatus Logico - Philosophicus, 4-4?1 , 5.02

إلا أن ما وجه إلى فريجه من نقد لا يرقى إلى مستوى الحقيقة بالنسبة لجوهر مذهبه فى المعنى والاشارة ، لان تمييز فريجه قصد به أساساً أن يؤكد رأيه فى مسألة الذاتيه Identity .

ثانيا : موقف فريجة من أسس النسق الاستنباطى ونظرية حساب القضايا

حينما تفحص فريجه « أسس وقوانين الحساب » وجد أن الرياضيات بأسرها تعمل وفق النسق الاستنباطى ، وأن الحساب إنما هو نسق متطور للمنطق لان كل قضية حسابيه هى بالضرورة قانون منطقى . لهذا إتجه فريجه إلى محاولة إقامة المنطق كنسق إستنباطى فى المحل الأول وفق أفكار ومفاهيم أساسية تجعل من النسق المنطقى نسقا محكما يفى بأغراض البحث العلمى .

وقد أشرنا ونحن بصدد الحديث عن أرسطو ، أن كثيراً من الباحثين والمؤرخين المعاصرين للمنطق الأرسطى ذهبوا إلى أن أرسطو كان مدركا تماما لفكرة النسق الإستنباطى فى المنطق . وقد ظلت فكرة إقامة المنطق كنسق استنباطى تراود فكر المناطقة عبر عصور طويلة إبتداءا من عصر ليبنتز وحتى فريجة، الذى إستطاع بدقته المنطقية أن يتبين النقاط الجوهرية بالنسبه للنسق الإستنباطى فى المنطق .

عرض لنا فريجه أسس النسق الإستنباطى فى المنطق بصورة شبه متكاملة فى « التصورات » [1] حيث نجد من ثنايا الأفكار التى قدمها لنا، أسس كل من نظرية حساب القضايا ونظرية حساب المحمول .

---

(١) محمود زيدان ، المنطق الرمزى : نشأته وتطوره " ص ١٤٩ — ص ١٥٦ . والرموز التى يستخدمها المناطقة هى رموز بيانو " ذلك لان رموز فريجه غاية فى الصعوبة .

(١) يرمز للقضايا بالرموز p ، q ، r

(٢) يرمز إلى تقرير القضية بالرمز ⊢

(٣) يرمز إلى المحمولات بالرموز F ، G ، H

(٤) يرمز إلى الموضوعات بالرمز X ، Y ، Z

(٥) وضع رمزا للسور الكلى للقضية (X)

(٦) اهتم بدراسة القضية المركبة والثوابت المنطقية مثل ثوابت السلب ،والوصل والفصل والتضمن المساواة . ورمز لكل من هذه الثوابت .

(٧) اهتم بالتمييز بين عضوية الفرد فى فصل واحتواء فصل فى آخر .

وقد وجد فريجه أنه يمكن إقامة النسق الإستنباطى ككل عن طريق استخدام فكرتين أوليتين هما التضمن ، والسلب بالاضافة إلى ثلاثة تعريفات هى ، ثوابت الفصل ، والوصل والمساواة .

وسوف نتناول كل من هذه الأسس ونحن بصدد عرض جوانب المذهب اللوجستيقى ونظريات المنطق الرياضى . ومن ثم فانه ينبغى علينا أن ننتقل لبحث المواقف الأساسية للمذهب اللوجستيقى من المنطق وأبحاثه ونظرياته حيث نجد تجديدا شاملا للأبحاث المنطقية .

الباب الثانى

رسل : بين المنطق التقليدى وبين المنطق الرياضى

الفصل الأول : رسل ونقد المنطق الأرسطى

الفصل الثانى : رسل وأسس المنطق الرياضى

الباب الثانى

رسل : بين المنطق التقليدى وبين المنطق الرياضى

خطوة رائعة سوف نحققها فى هـــذا الباب ، وهى مدى أسهام رسل فى تطوير الدراسات المنطقية ، وتأسيسه لمبادئها وأسسها على مبادىء رياضية ، ومنهج رمزى .

تتالت الخطوات السائرة نحو إقامة المنطق الرياضى الحديث، وأسهم كل واحد من المناطقة والرياضيين والفلاسفة بإسهام ما، لكن هـذه الاسهامات كلها قد تجمعت فى عقل واحد من أئمة الفلاسفة والمناطقة وهو برتراند رسل وساعده فى ذلك أمام الرياضيين فى العصر الذى نعيش فيه وهو هوايتهد .

وحينما تجمعت هذه الاسهامات فى يد تلك العبقرية الفذة ، كان عليه أن يستفيد منها من جهة ، وأن يطور بعضها من جهة ثانية، وأن يصيغها فى هيئة نسق متكامل من ناحية ثالثة .

أستفاد رسل من نظرات أرسطو التى تدعـــو إلى أن موضوع المنطق هو الاستنباط ، ومن أن المنهج فيه يجب أن يكون رمزيا ، ومن أن الغاية التى يجب أن تستهدفها الدراسات المنطقية هو امكانية قيام المنطق على هيئة نسق استنباطى Deductive System . كما استفاد من نظريات الرواقيين المنطقية، ومن اسهامات ريموندليل وديكارت وليبنتز ودى موجان وهاملتون وبول وبيانو وفريجة . وكان عليه بعد ذلك أن يطور بعض هذه الدراسات الخاصة بالمنطق، فذهب إلى أن القضية العامة لا تتضمن تقريرا وجوديا ، وهى لكى تتضمن مثل هـذا التقرير

الوجودى يجب أن تصاغ على هيئة قضية شرطية، تشترط أولا وجود من نتحدث عنه، أى وجود الموضوع أولا ،ثم إضافة ما نراه إلى هذا الموضوع .أى أننا نقرر أن الموضوع إذا كان موجودا فانه يلزم عنه أنه كذا من الصفات أو المحمولات.

والحق أن إدراك القضية العامة على أنها شرطية متصلة قد ترتب عليه نتائج خطيرة فى دوائر كثيرة من دوائر البحث المنطقى ، عرضنا لها خلال الفصل الأول من هذا الباب .

وفى الناحية البنائية نجد رسّل يقيم أو يؤسس اللوجستيقا ويرى أن النسق الذرى يمكن صياغته على هيئة نسق استنباطى ، وأن هذا النسق يتضمن مسلمات وتعريفات تشتق منها سائر القضايا ثم يتحدث عن أنواع القضايا وأنواع الثوابت ولقيمتى الصدق والكذب بالنسبة إلى دالة السلب negation ودالة الفصل Disjunction ودالة الوصل Conjunctin ، ودالة التضمن Implication ودالة عدم الاتفاق Incompatibility التى أحلها رسّل محل دالة التكافؤ بعد أن أشار عليه شيفر Sheffer بذلك .

وهكذا استفاد رسّل من الاسهامات السابقة عليه وعدّل، بل وثار على المنطق التقليدى ، ثم قام بتشييد كامل لأسس المنطق الرياضى وسنعرض لهذه الموضوعات من خلال فصلين ، الفصل الأول نتحدث فيه عن نقد رسّل للمنطق الارسطى ، والفصل الثانى نتناول فيه أسس المنطق الرياضى عند رسّل.

الفصل الثاني

رسل وأسس المنطق الرياضي

اتضح لنا من خلال مناقشتنا لموقف رسل من المنطق التقليدي، أن ثمة عيوب في هذا المنطق أراد رسل أن يحدد موقفه منها، ومن ثم فانه قد تعين عليه أن يأتي بالجديد حتى يصلح ما في وجهات نظر التقليديين من أخطاء. فهل تمكن رسل من تقديم نظرة جديدة للمنطق من خلال مبحث القضايا ؟

الواقع أن معرفة موقف رسل من مبحث القضايا يحتم علينا أن نلقي الضوء على قضايا النسق اللوجستيقي، الذي تمثل في تبني صورة القضية الذرية Atomic Proposition كصورة أساسية يقوم عليها جهاز « مبادىء الرياضيات ».

استند رسل في أساس نظرته للعالم على بديهية مضمونها أن العالم الخارجي يتكون من أشياء كثيرة ذات كيفيات qualities أو علاقات[1] Relations، وهذه الأشياء هي الوقائع Facts التي يعبر عنها في قضايا.

والقضايا في النسق الذري يضمنها رسل في تصنيفات خمس أساسية هي القضية الذرية، والقضية الجزيئية Molecular والقضية العامة، والقضية الوجودية، والقضية العامة عمومية تامة. ويهمنا من بين هذه الصور جميعا دراسة صورة القضية الذرية والقضية الجزيئية حيث يستند نسق مبادىء الرياضيات إلى صورتيها.

١ — القضية الذرية

القضية الذرية، هي أبسط أنواع القضايا التي تعبر عن الواقعة الذرية. يذهب رسل في مبادىء الرياضيات إلى تعريف القضية الذرية بطريقتين. فالقضايا الذرية هي كل « القضايا التي لا تحوي أجزاء تكون قضايا، ولا تحوي مفاهيم مثل all

أو بعض Some (١) . كما وقد تعرف على أنها القضية التي تنسب صفة من الصفات لشيء ما ، أو أن مجموعة من الأشياء تقدم بينها علاقة ما (٢)

ويستند تعريف القضية الذرية في « معرفتنا بالعالم الخارجي» (١٩١٤) إلى أن القضية الذرية هي تلك التي « تثبت أن شيئا ما له كيفية معينة ،أو أن أشياء معينة لها علاقة معينة » (٣) . إلا أن رسل في كتاب المبادىء يفضل التعريف الثاني الذي قدمه في المبادىء والسبب في ذلك أن هذا التعريف يقرر صراحة النظرة العلائقية باعتبارها أساس للمنطق الرياضي .

والقضية الذرية ، كما يراها رسل ، أمثلتها «هذا أحمر» ، « هذا أسبق من ذلك» « هذا قبل ذلك » ، وقد تأخذ القضية الذرية إحدى الصور التالية (٤) .

$$R_1 (X) , R_2 (X , Y) , R_3 (X , Y , Z) , \ldots etc$$

حيث تشير R , R, ... إلى العلاقة Relation ، تشير X , Y , Z . . . . إلى الاشياء ، أو الافراد الجزئية الموجودة في الخارج ، والجزئي Particular كما يعرفه رسل هو « أي شيء يمكن أن يكون موضوعا للقضية الذرية» (٥) ففي القضية الذرية يوجد لدينا اسم علم Proper name وكلمة أخرى ليست إسم علم .

القضية الذرية إذن هي تلك التي ننسب فيه صفة من الصفات إلى جزئي ، أو أنها تلك التي تقوم فيها علاقة بين جزئيين . أنهـــا قضية بسيطة ، محمولات ، أو أسماء ومحمولات ، أو أسماء وعلاقات (٦) .

---

(1) Principia, V. I, Introcuction, P. XV
(2) Ibid, P. XV
(3) Russell., External world, P. 62
(4) Principia, P. xix
(5) Ibid, P. xix
(6) Ambrose & Lazerowitz., Fundamentals of logic, P. 169

فلا بد أن نضيف إليها الجملة « يوجد إغريق » (٣) ، لأنه إذا لم يكن هناك فى وقت من الأوقات إغريق ، فان كل من القضيتين « كل الاغريق ناس » ، لا واحد من الاغريق انسان » صادقتان معا . وفى هذا يقول رسل :

"If it happend that there were no Greeks, both the proposition that 'All Greeks are men' and the proposition that 'No Greeks are men, would be true" (1).

من التأمل فى صورة القضية العامة وجد رسل أن الصورة الصحيحة للقضية « كل الاغريق ناس » هى « إذا كان ا إغريق فانه يلزم عن ذلك أنه انسان » . على هذا النحو يتبين لرسل أن صورة القضية العامة إنمـــا هى فى مضمونها شرطية متصلة (٢) hypothetical Conjuction . وكان أصحاب النزعة الأرسطية قد اخفقوا فى إدراك هذا التمييز ، لأنهم إفترضوا أن كلا من القضية الجزئية ، والقضية العامة ، ينطويان على تقرير وجودى لأفراد الموضوع (٣) . فبينما القضية « سقراط فان » تنسب محمولا لموضوع مسمى (٤) ، نجد أن القضية « كل الاغريق فانون » تعبر عن علاقة بين محمولين « فان » ، « إغريق » . وقد اشار رسل (٥) إلى أن برادلى Bradley قد أدرك أن القضية العـامة هى فى حقيقة أمرها شرطية متصلة

---

(1) Ibid, p. 229

(٢) ناقش رسل هـذا الموقف أيضا فى عام (١٩٠١) فى : Mathematical logic ٧٠ — ٧٢

(3) Mourant., op. cit, p. 91

(4) Mourant., Myphilosophical Development, p. 63.

(5) Russell., (a) Mathematical logic, p. 70

(b) Philosophy of logical Atomism, p. 237

وقدم لنا المثال الذى طرحه برادلى فى « مبادىء المنطق » ، « المذنبون سوف يحاكمون » . يفسر رسل هذا المثال على النحو التالى « إذا أذنب شخص فأنه سوف يحاكم » أو بمعنى آخر « إذا كان س مذنب فان س سوف يحاكم » . لكن برادلى بطبيعة الحال لم يكن ذا عقلية رياضية تؤهله لأن يدرك أهمية هذه النقطة كما أدركها بيانو أو فرجة من بعده.

وقد ترتب على إدراك القضية العامة على أنها شرطية متصلة نتائج هامة . فالقضية « سقراط انسان » تتضمن تقريراً وجودياً لافراد الموضوع ، بينما الصورة « كل الأغريق فانون » لا تنطوى على مثل هذا التقرير ، بل تعبر عن علاقة بين دالتى قضيتين (١) .

أى أنها تعبر عن علاقة بين محمولين ، وقد أمكن لأصحاب المنطق الرياضى أن ينطلقوا من هذه النقطة فيما بعد ليطوروا جزءاً هاما من مباحث المنطق الرياضى ذات الطابع الفنى Technique خاصة فيما يتعلق بنظرية حساب المحمول (٢) وأو حساب الدوال » ، ذلك أن ضروب الأقيسة ـ فى نظرية القياس التقليدية ـ ذات الصورة الكلية سيصبح بعضها بالضرورة ضروبا خاطئة بناءاً على ما انتهينا إليه بشأن إعتبار القضية الكلية Universal أو العامة ، علاقة بين محمولين .

لا شك أن رسل حين درس المنطق الرمزى لبيانو أستفاد الكثير من المفاهيم التى أدخلها بيانو فى دراسته للنطق ، ومن أهم هذه المفاهيم فكرة « دالة

(1) Russell., Myphilosophical Development, p. 66

(2) Principia., v. 1, pp. 127 — 160

(٣) من المعروف أن رسل فى محاضراته عن فلسفة الذرية المنطقية ربط دراسته لهذه الموضوعات الثلاثة ببعض .

Russell, The Philosophy of logical Atomism, p. 234.

القضية » [1] Propositional Function . ودالة القضية هو تعبير يحتوى على مكون أو أكثر غير محدد القيمة ويصبح هذا التعبير قضية حين نخلع على هذا المتغير أو المتغيرات « قيم » [2] values .

ومفهوم دالةالقضية الذىأخذ به رسل والمناطقة من بعده يمكننامن التمييز بين القضية ودالة القضية . فالخاصية الأساسية للقضية تتمثل فى أنها إما أن تكون صادقة true أو كاذبة False ، على حين أن دالة القضية تتصف بصفات ثلاثة أساسية ، هى صفات الضرورة necessaity والأمكان Possibility والاستحالة Impossibility . وعلى هذا الأساس فان أى تعبير يحتوى على قيمة مجهولة ـ بلغة الرياضيات ـ أو قيمة غير محددة ، نسميه دالة قضية . فاذا قلنا (س انسان) فانهذة الصوره تعبر عن دالة قضية ، وتصبح قضية بمجردتعيين قيمةالمتغير(س)

فاذا وضعنا « سقـــراط » مكان (س) لأصبحت لدينا قضية صورتها « سقراط انسان » وهذه الصورة الأخيرة تنسحب عليها صفات الصدق والكذب فقط ، على حين أن الصورة «س انسان» تنسحب عليها صفات الضرورة والإمكان والاستحالة باعتبارها دالة القضية . وقد أغفل التقليديون هذا التميز الأساسى بين كل من القضية ودالة القضية .

ذهب أرسطو إلى ، أنه يقال لقضيتين أنهما متقابلتين إذا ما اختلفتا فى التكيف أو الكم أو الكم والكيف معا [3] ، فالتناقض حينما يقوم بين الكلية

---

(1) Russell., Principles of Mathematics p 22.

(2) Russell, (a) Principia, v. I, p. 38 (b) Introduction to Mathematical philosophy, pp. 155 — 156
(c) The Philosophy of logical Atomism p. 230
(d) My Philosophical Development, p. 66

(1) Keynes., Formal logic, p. 109.

السالبة والجزئية الموجبة والكلية الموجبة والجزئية السالبة، يقضي إلى أن القضيتين المتناقضتين Contradictory لا تصدقان معا ولا تكذبان معا [1]. كما وأن المتضادتين لا تصدقان معـا وقد تكذبان معـا . والتضاد يقوم بين الكلية الموجبة والكلية السالبة .

لكن رسل تبين فساداً واضحا فى صيغة هذه القوانين ، يقول لنا رسل .

> " The Proposition ' No Greeks are men' is , Course, the proposition ' All Creek are not men ' both prapositions Will be true ... if it happens that there are no Greeks. All Statements about all the members of a class that has no members are true, because the Contradictory of any general Statement does assert existence and is therefore False in this case " [2]

يتضح لنـا من مقارنة موقف رسل فى هذا الفصل ، بما ذهب إليه التقليديون من المناطقة ، أنه يقرر بما لا يدع مجالا للشك بناءاً على موقفه السابق من القضية العامة ، أن كلا من القضيتين المتناقضتين تصدقان معا . وذلك فى حالة ما إذا دلت موضوعات القضيتين على فصل ليس له أعضاء A Class that has no members وقد ترتب على هـذا أن بدأ رسل [3] فى إعادة صياغة الصور الأربعة القضـايا

---

(1) Ibid., p. 109.

(2) Russell., The Philosophy of logical Atomism, p. 2 29.

(3) Russell., Introduction to Mathematical Philosophy. p. 162.

الحملية فى المنطق الأرسطى حيث قدم لنا صياغة جديدة تتلاءم مع أفكار المنطق الرياضى .

« كل ا هى ب » تعنى « φ س تتضمن ψ س » صادقة دائماً
« بعض ا هى ب » تعنى « φ س و ψ س » صادقتان أحياناً
« كل ا ليست ب » تعنى « φ س تتضمن لا ـ ψ س » صادقة دائماً
« بعض ا ليست ب » تعنى « φ س ولا ψ س » صادقتان أحياناً

تقوم هذه الصياغة على التمييز بين الصورتين « كل الناس فانون » ، « سقراط فان » . القضية الأولى شرطية متصلة نترجمها على النحو التالى « إذا كان سقراط انسان ; فسقراط فان » ، أى إذا كان كل الناس فانون ، وكان سقراط إنسان ، فان سقراط فان » . ويمكن لنا أن نترجم القضية الأولى فى تعديل رسل هذا ; أى ان « كل ا هى ب » تعنى ان « φ س تتضمن ψ س » صادقة دائماً ، على النحو التالى : إذا عرفنا (ا) بداله القضية φ س وعرفنا (ب) بدالة القضية ψ س فانه اذا كان (ا) « ناس » كانت φ س (س انسان) ، وإذا كان (ب) فان كانت φ س « هناك وقت عنده يموت س » ، ومن ثم فإن الصورة (كل ا هى ب) تعنى φ س تتضمن ψ س صادقة أحيانا .

تلك هى المواضع الأساسية التى تناول فيها رسل معالجة المنطق الأرسطى نقداً وتعديلا ، وسوف تتضح لنا مواقفه الأساسية ونحن بصدد معالجة مذهبه الأساسى .

الفصل الثاني

رسل وأسس المنطق الرياضي

الفصل الأول

رسل ونقد المنطق الأرسطي

إذا كان المنطق الأرسطي قد تعرض لكثير من النقد على أيدي المناطقة الرمزيين، فإنه من الواجب علينا أن نلقي الضوء على موقف أصحاب المنطق الرمزي المعاصر، وبصفة خاصة أصحاب الاتجاه اللوجستيقي من بعض المواضع الخاصة بمبحث القضايا في المنطق التقليدي ؛ ولهذا فإننا سوف نعرض لموقف المذهب اللوجستيقي من خلال أبحاث رسل في مطلع هذا القرن لنقف على كيفية معالجته لمباحث المنطق الارسطي . ذلك لأن فهمنا لنقد المذهب اللوجستيقي ، للمنطق الأرسطي ، سيمكننا من معرفة وجهة نظر المناطقة المعاصرين من أبحاث المنطق مما يتيح لنا الفرصة لتناول نظريات المنطق الرياضي المعاصر .

والوقع أننا إذا كنا نعرض لموقف الاتجاه اللوجستيقي ممثلا في أبحاث رسل ، فان ذلك يرجع بالضرورة إلى أن أبحاث المشايعين لهذا الاتجاه انطلقت فعلا من أبحاث رسل واتجاهاته الأساسية في أكثر مواقفها .

تهيأت لنا الفرصة ونحن بصدد عرض اتجاه أرسطو المنطقي ، والابحاث المنطقيه التاليه عليه ، أن نعرف وجهة نظر التقليديين من المناطقة فوجدنا أنهم اعتبروا صورة القضية الحملية كصورة أساسية وعرفنا أيضا أن المشايعين للموقف الأرسطي حصروا أبحاثهم في التقسيم الرباعي الذي قدمه أرسطو للقضايا ذات صورة الموضوع ــ المحمول ، وبذلك فقد انتهوا إلى حصر القضايا في أربعة صور أساسية (1) :

(1) Stebbing, S., op cit, p. 47

الجزئية السالبة والتى صورتها (بعض ا ليست ب)

الجزئية الموجبة والتى صورتها (بعض ا ليست ب)

الكلية السالبة والتى صورتها (كل ا ليست ب)

الكلية الموجبة والتى صورتها (كل ا هى ب)

ويستند التقسيم الرباعى للقضايا الحملية ، كما قدمه أرسطو ، إما إلى الكم أو إلى الكيف . رأى رسل من خلال استعراضه لأبحاث المنطق الأرسطى ، ومن خلال آراء بيانو وفريجة أن تقسيم القضايا على هذا النحو خاطئ من أساسه لأن القضايا ذات الصورة (كل ا هى ب) ليست حملية بالمعنى الدقيق ، لكنها تعبر عن علاقة بين محمولات ،[١] . وهـذه القضايا هى فى جـوهرها قضايا تحليليـة[٢] Analytic Propositioins لأنها تعبر عن علاقة تقوم بين ا ، ب أى بين محمولين. فما هو إذن موقف رسل من القضية العامة ؟

قدم لنا رسل موقفه من القضية العامة فى أكثر من موضع من أبحاثه، إلا أن عرضه الشامل لهذا الموضوع تضمنته المحاضرة الخامسة من سلسلة محاضراته عن « فلاسفة الذرية المنطقية » The Philosophy of logical Atomism (١٩١٨-١٩١٩) .

يرى رسل أن القضية العـامة لا تتضمن تقريرا وجوديا ، ذلك لأنه إذا قلنا أن كل الاغريق ناس ، فانه لكى تصبح هذه القضية منطوية على تقرير وجودى

---

(1) Russell, B., On the Relations of universals and Particulars. P. 123

(2) Ibid., P. 123

(3) Russell, The Philosophy of Logical Atomism, P. 229.

٢ — القضيــة الجزيئية

تعتبر القضية الجزيئية صورة أساسية من صور القضايا فى النسق اللوجستيقى، وتستند فى جوهرها إلى نظرية الروابط . يعرف رسل القضايا الجزيئية بأنها القضايا التى « تحوى قضايا أخرى يمكن تسمية ذراتها » [١]، وهذه القضايا تحوى كلمات مثل IF , or . If . . . then .

ينظر رسل إلى القضية ، على اعتبار أنهـا تناظر الواقعة بطريقتين . إذا كانت الواقعه متحققة فى العالم الخارجى ، أى حادثة ، فان القضية تكون صادقة ، أما إذا لم تكن الواقعة متحققه فى الخارج ، فان القضية تكون كاذبة . فالقضية « سقراط فان » تكون صادقة فى حالة كون الواقعة قد حدثت فعلا وتكذب فى حالة ما إذا كان « سقراط غير فان » ، وهذا ما جعل رسل يؤكد لنا أن الواقعة لا تكون صادقه أو كاذبة ، لأن خاصية الصدق والكذب تنسحب فقط على القضايا ، فهى وحدها ما يحوى ثنائية dualism الصدق والكذب [٢] .

فالقضية الجزيئية صورة مختلفة تماما عن صورة القضية الذرية ، فاذا قلنـــا « سقراط فان أو أن سقراط ما زال حيا » Socrates is mortal or socrates is still living ، فإن هذه القضية يمكن أن نشير إليها بالقضية الرمزية التالية :

$$(P \vee q)$$

تتكون هذه القضية الجزئية من قضيتين p و q إرتبطت معا بثابت الفصل Disjunction وكل قضية منها تناظر واقعة من الوقائع، وكلا الواقعتين يدخل مباشرة فى الوقوف على صدق أو كذب القضية الجزيئية ، لكن ينبغى أن نلاحظ أن العالم الخارجى لا يحوى واقعة منفصلة تناظر القضية الجزيئية ($p \vee q$) ، فليس هناك فى العالم الموضوعى ما يناظر كلمة (أو) التى يعبر عنها ثابت الفصل .

(1) Russell., The philosophy of logical Atomism, P. 207
(2) Ibid., P. 184

والحقيقة أن الروابط تلعب دوراً هاما بالنسبة لصورة القضية الجزيئية . فالقضايا الجزيئية قد تحتوى ثوابت الوصل Conjunction أو الوصل Disjunction أو التضمن Implication أو السلب negation أو التكافؤ equivalence ، ولكى نميز بين صورة وأخرى من هذه الصور فلابد لنا من معرفة معنى الثابت Cansatant . والثابت كما يراه رسل (١) لابد وأن يكون محدداً تحديداً تاما ، وهذا ما يميزه عن المتغير الذى ينتظر التحديد.

والحكم على القضية الجزيئية بالصدق truth أو الكذب folsehood يكون من خلال قيمة الصدق (٢) Truth - Value . فالصدق هو قيمة صدق قضية صادقة ، والكذب هو قيمة كذب قضية كاذبة (٣) .

ومن ثم يمكن لنا وضع الدوال الأساسية التى يقوم عليها النسق الإستنباطى ككل ، من خلال تحديده لمعنى الثوابت ، ولقيمة الصدق ولدالة الصدق .

(١) دالة السلب (٤) Negation

يرمز للسلب فى مبادىء الرياضيات بالرمز ~ أى not ، فاذا كان لدينا أى قضية مثل p فإن دالة سلبها هى P ~ أى not - P .

ومن أهم ما نلاحظه على هذه الدالة ، أنها دالة قضية واحدة . ولهذا فان صورتها مختلفة عن بقية الدوال الأخرى التى تعبر عن علاقة بين قضيتين (٥) .

---

(1) Ruasell., Princples cf mathematics § . 6

(٢) يرجع هذا المصطلح الى فريجه كما سبق أن أشرنا فى تناولنا لموقف فريجة .

(3) Russell., Introduction to Mathematical philosophy, p. 146

(4) Principia, p. 93

(5) Russell., Introduction to Mathematical Philosophy, p. 147.

ولدالة السلب قيمتين فقط للصدق والكذب ، فاذا كانت القضية p صادقة . فان p ~ تكون كاذبة ، وإذا كانت p كاذبه فان p ~ تكون صادقة .

ويمكن معرفة قيمة الصدق لهذه الدالة عن طريق قائمة الصدق Truth Table الآتيـــة :

قائمة الصدق (١) :

P	~ P
T	F
F	T

(٢) دالة الفصل Disjunction

يرمز للفصل فى النسق الاستنباطى لمبادىء الرياضيات بالرمز v ويعنى or . فاذا كان لدينا قضيتان p , q تعبر كل منها عن قضية ذريه ، فان القضية الجزيئية التى تحويها ، أى المؤلفة منها معا فى قضية واحدة، تكون صياغتها (p v q) .

---

(١) سنرمز إلى الكلمه صادقة True بالحرف الأول من الكلمه (T) . وسنرمز لكلمة كاذب False بالحرف الأول من الكلمة (F) .

وتصدق القضية الجزيئية (p v q) حينما تصدق كل من القضية p والقضية q أو حينما تصدقان معا ، لكنها تكذب حينما تكذب كل من p , q معا [١] قائمة الصدق .

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

يلاحظ أن قيمة صدق دالة الفصل تتوقف على قيمة صدق p و q وعلى معنى ثابت الفصل الذى تحدده القاعدة المذكورة . ولهذه الدالة كما ترى ثلاث حالات صدق ، وحالة كذب واحدة .

---

(1) ibid, P. 147

٣ — دالة الوصــل Conjunction

يرمز للوصل فى مبادىء الرياضيات بالرمز (.) ويعنى and . وقاعدة هذه الدالة تنص على أن الصيغة المؤلفه من p ، q وهى (p . q) تصدق فقط حين تصدق كل من p ، q معا ، وتكذب إذا كانت أحداهما على الأقل كاذبة .

قائمة الصدق

p	q	p . q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

يلاحظ أن قيمة صدق هذه الدالة يحددها الثابت (.) ، وقيم صدق الدالة هى القيم الموجودة تحت الثابت الرئيسى (.) .

٤ ــ دالة التضمن implication

يرمز للتضمن فى مبادىء الرياضيات بالرمز ⊃ ويعنى imply فاذا كان لدينا الصيغه ($p \supset q$) فانها تكذب فى حالة واحدة فقط ، وذلك حين تصدق p وتكذب q ، ولكنها تصدق فى الحالات الثلاث الأخرى .

ودالة التضمن تساوى دالة سلب كل من القضيتين معا مرتبطتان برباط الفصل . وبذا يمكن وضعها فى المعادلة الآتية .

$$p \supset q = \sim p \vee q$$

قائمه الصدق .

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(٥) داله عدم الاتفاق ineompatibility

يرمز لعدم الاتفـــاق بالرمز (/) أى Styoke. فالصيغة (p / q) تقرأ p stroke q ، أى p كاذبة أو q كاذبة . وقـــد استخدم رسل دالة عدم الاتفاق بدلا من داله الكافئ — وذلك بعد أن أشار عليه شيفر Sheffer بأنه يمكن صياغه كتاب المبادىء باسره وفقها . وتصدق هـــذه الدالة إذا كان كلا القضيتين المؤلفيتين كاذبتين أو أحداهما كاذب، لكنها تكذب فى حالةصدقهامعا.(١) وعدم الاتفاق يتكون من سلب دالة الفصل، أو انفصال سلب p وسلب q . ومن ثم يمكن أن نضع الصيغة السابقة فى أحدى المعادلتين .

$$1 - p/q = \sim (p \cdot q)$$

$$2 - p/q = \sim vp \sim q$$

قائمة الصدق

p	q	p ·	~ (p · q)
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

(1) Russell., Introduction to Mathematical philosophy p. 147.

تلك هى الدوال الاساسية التى يتضح لنا من خلالها الصور الاساسية للقضايا الجزيئية كما عرضنا لها من خلال دالة الفصل ودالة عدم الاتفاق ودالة التضمن على اعتبـــار أنها صور أساسيه للقضايا الجزيئية والتى أقيم على غرارها النسق اللوجستيقى فى مبادىء الرياضيات بطريقته البرهانية المعروضة فى الجزء الأول من « المبادىء » .

الباب الثالث

الصلة بين المنطق والرياضة

لابد لنا أن نتوقف لحظة نلتقط فيها أنفاسنا من هذا التعاقب الضخم الذى تتالى على مسألة تطوير المنطق من صورى قديم إلى رياضى حديث وذلك قبل أن نتحدث عن النظريات التى جابت آفاق المنطق الرياضى.

ونلاحظ أننا قلنا تطور المنطق من صورى قديم إلى رياضى حديث، وهذه الملاحظة ذاتها تقودنا إلى إدراك أولى يشير إلى ناحية علاقية ما بين المنطق وبين الرياضة، وهى مسألة الصلة بين المنطق والرياضة: هل هذه الصلة هى صلة تشابه ظاهرى وحسب، أم أنها صلة جزء بكل، سواء أكان هذا الجزء منطقا أم كان رياضة، أم أنها يرجعان معا إلى أصول واحدة هى الأصول الاكسيوماتيكية كما قرر ذلك هلبرت، أم أنهما معا يرجعان إلى قوة عليا هى قوة الحدس؟ لقد تباينت ردود المناطقة والرياضيين حول الإجابة على هذا السؤال الأخير، وظهرت مذاهب خمسة تحاول - من وجهة نظرها الخاصة - بيان أو اصر الارتباط بين المنطق وبين الرياضة. وهذه المذاهب هى [1].

١ - مذهب التشابه الظاهرى

ويذهب أنصار هذا المذهب إلى أن الصلة بين المنطق والرياضة هى صلة

---

١ - يرجع القارىء إلى البحث الممتاز الذى قدمه الدكتور محمد ثابت الفندى حول هذه المذاهب فى كتابيه « أصول المنطق الرياضى » ص ص ٩١-١١١، و « فلسفة الرياضة » ص ص ١٥٥، ١٦٤

تشابه ظاهرى ، فإذا نظرنا إلى المنطق من جهة وإلى الرياضة من جهة أخرى ؛ لبدت الرياضة شبيهة بالمنطق من حيث كونها :

أ — رمزيان .

ب — صوريان .

جـ — ميكانيكيان أو آليان .

وفيما يتعلق بالتشابه الخاص بالرموز فنحن نعلم أن العلم الرياضى يستخدم دائما الرموز أو المنهج الرمزى فى كل مسائله وعملياته ، بل — وأن خصيصة العلم الرياضى الأولى هى تمسكه بالمنهاج الرمزى هذا . ولقد اكتسبت الرياضة خلال تاريخها الطويل دقة فائقة بفضل استخدامها للمنهج الرمزى ، وحاولت علوم كثيرة تطبيق هذا المنهج على مسائلها وموضوعاتها لكى تكتسب نفس الدقة واليقين والتجريد والعموم الموجودة فى العلم الرياضى . وإذا نظرنا الآن إلى المنطق فى صورته الحديثة المتطورة ، وعلمنا أن المسائل المنطقية والتى أصبحت تقوم الآن على هيئة نسق استنباطى Deductive Sytem إنما أمكن صياغتها بلغة رمزية تماما كما هو الأمر فى الرياضة لأدركنا أن التشابه واضح بين المنطق وبين الرياضة من حيث أنهما يعبران عن مسائلهما بصورة رمزية تنأى عن كثافة الألفاظ اللغوية وغموضها واضطرابها .

حقا لقد كانت رموز أرسطو واضع المنطق الصورى ناقصة إذا أنه رمز إلى المتغيرات المنطقية Loigcal Variables مثل أ ، ب ، جـ ولم يرمز إلى الثوابت المنطقية Logical Constants مثل : اذا كان ، هو ، فان .... إلخ فجاء جهازه الرمزى ناقصا ،ولكن خطوات التطوير التى تتالت نحو إنضاج المنطق

الصورى بحيث أصبح منطقا رياضيا تمكنت من أن تستكمل الجهاز الرمزى ، فتم ترميز الثوابت المنطقية . وأصبح المنطق فى صورته الرياضيـــة تلك يجعلنا لانعلم إن كنا فى الرياضة أو المنطـــق بسبب التشابه الكبير بين العلمين فى الناحية الرمزية .

أما النقطة الثانية التى يتشابه فيها المنطق مع الرياضة فهى الناحية الصورية . فالباحث فى المنطق الأرسطى لايلبث أن يواجه بحقيقة قائمة فى المنطق الصورى وهى أن أرسطو قد رد جميع القضايا إلى وحدة صورية هى وحدة (الموضوع- المحمول) ولو لم يتمكن أرسطو من رد قضاياه جميعها إلى هذه الوحدة لما تمكن من القيـام بعملية الاستنباط القياسى . وإذا كان المنطق الصورى قد تطور بعد ذلك من حيث الموضوع والمنهج والغرض إلا أنه ظل محتفظا رغم ذلك بالصورة فى نقائها التام ، ذلك النقاء الذى يتيح للعقل أن ينتقل بيسر وسهولة من قضية مستنبطا منها مايلزم عنها . حقا لقد ظهر هناك منطق آخر هو منطق الاستقراء Induction أو مايسمى أحيانا بالمنطق المادى ، وارتبط هذا النوع الأخـــير بالعلوم الطبيعية - التجريبية على نحو خاص ، ولكن مثل هذا النوع الأخير الذى يبتعد عن الرمزية وعن الاستنباط وعن الصورية لايعنينا هنا ، إذ مايعنينـا هو ايجـاد تشـابه بين النوع الصورى من المنطق وبين الرياضة حيث تشابه مع المنطق فى هذه الناحية الصورية .

وبديهى أن الرياضة صورية كالمنطق ، فهى لاتتجه إطلاقا إلى وقائع مادية تعوق عمليـــات الاستنباط فيها هذا من جهة ، ومن جهة أخرى فان الرياضة لايمكن بل ولايجوز لها أن تتجه نحـــو المنهج الاستقرائى . ومعنى هذا أن الاستنباط جوهر العـــلم الرياضى وهو أيضا جوهر المنطق ، وهذ الاستنباط

ممكن فى العلمين لأنهما صوريان مجردان وليسا ماديان بأى معنى من معـــانى المـــادية .

أما وجه التشابه الثالث والأخير بين المنطق وبين الرياضة فهو ينتج عن التشابهين السابقين ، ذلك لأنه إذا كان المنطق رمزيا ، وإذا كان صوريا ، فانه لابد أن يكون آليا مثله فى ذلك مثل الرياضة تماما . فاذا كنا فى الرياضة تتناول العمليات على نحو ميكانيكى آلى فنحول فيها ونبدل ونسقط ، ونقدم ونؤخر ، ونصل ونفصل بالأقواس حسب قواعد معينة فاننا نستطيع أن نقوم بنفس هذه العمليات ونحن بصدد المنطق مادام أنه صورى من جهة ورمزى من جهة أخرى .

ومن ثم ذهب أنصار هذا المذهب إلى أنه توجد صلة بين المنطق والرياضة ، وإن كانت هذه الصلة ظاهرية أو صلة تشابه خارجى بين العلمين من حيث كونهما رمزيان وصوريان وميكانيكيان .

إلا أن المسألة بعد ذلك اتخذت طابعا آخـــر ، وتعمقت فى الصلة الداخلية وليست الخارجية بين المنطق وبين الرياضة ، فظهر أولا مذهب جبر المنطق الذى اعتبر المنطـــق جزءا من الرياضة وامتدادا لقواعده وقوانينه ثم ظهر المذهب اللوجستيقى وهو يتخذ طريقا عكسيا لمذهب جبر المنطق إذ أنه يرى أن الرياضة جزء من المنطق وامتداد لقوانين ومسائله ، ومعنى هذا أن المذهب اللوجستيقى اتخذ طريقا عكسيا لمذهب جبر المنطق . إلا أن ديفيد هلبرت رفض أن تكون صلة المنطق بالرياضة هى صلة جزء بكل أو صلة كل بجزء وإنما رأى ان العلمين يرجعان معا إلى أصول أكسيوماتيكية لاهى منطقية ولا هى رياضية ،

ثم ظهر بعد ذلك المذهب الحدسى الذى يقيم الصلة بين العلمين على أساس حدسى .
ولنتناول الآن هذه المذاهب بالتفصيل .

٢ ـ مذهب جبر المنطق

يرى أنصار هذا المذهب أن المنطق برمته يمكن التعبير عنه برموز جبرية ، وأنه متى أمكن القيام بمثل هذه الخطوة ، يصبح المنطق مجـــرد فرع من فرع الرياضة أو مجـــرد نظرية رياضية بين النظريات الكثيرة التى ظهرت على هيئة جبرية مثل جبر الأعداد الرياضية وجبر الأعداد التخيلية ونظرية المجاميع وغيرها وعلى هذاالنحو يكون المنطق المعبر عنه برموز جبرية أحد هذه النظريات ، ومن ثم يكون فرعا من فروع الرياضة وامتدادا لنظرياتها وقوانينها . وهـــذا هو أساس مذهب جبر المنطق Algèbra oF Logic .

ولقد كان ليبنتز هو أول من تحدث عن جبر المنطق ولكن أبحاثه لم تلق نجاحا فى أيامه ؛ ولكن حينما بين بول أهمية جبر المنطق وألقى مزيدا من الضوء عليه ، بدأ الباحثون يعودون إلى آراء ليبنتز عن جبر المنطق ، فاكتسبت أعمال ليبنتز الجبرية المنطقية أهمية خارقة . إلا أننا سوف نكتفى هنا بأبراز مذهب جبر المنطق كما قرره بول .

يفسح مذهب جبر المنطق لبول مجالا واسعا للتطبيقات الرياضية ، خاصة فى نظرية المجاميع sets التى ظهرت فى الأنساق الرياضية لكل من «جورج كانتور» و «ديديكند» . وإذا كنا قد أشرنا من قبل الى الصورة الرياضية والمنطقية لمذهب جبر المنطق «لبول» ، فانه يمكن لنا أن نتقدم بخطوات واسعة الى

الأمام لاختبار صحة ماذهب إليه بول فى مجال نظرية المجاميع. فما هى المجموعة ؟ وماهى المفاهيم الأساسية الداخلة فى إطار نظرية المجاميع ؟ .

نحن نعلم من دراستنا للمنطق أن أرسطو عرف ضمنا نظرية الفصول — كما سنشير إليه فى ثنايا عرضنا لنظرية المنطق الرياضى — من خلال تقسيمه للاجناس والأنواع : وقد أشار أرسطو إلى تقسيم الأجناس والأنواع على أساس التشابه الداخلى فى نطاق الأشياء ، فالمجموع المتشابه من الكائنات ذات الصفات المتشابهة تندرج تحت جنس واحد أو نوع واحد . وعلى هذا النحو يكون أرسطو قد وضع لنا الأساس الأول لما يسمى بالمجموعة وأفرادها أو عناصرها « فالمجموعة المكونةمنأشياء متشابهه أوما تكون ذات صفة أو صفات واحدة هى ماتسمى بالمجموعة » [1] وأفراد المجموعة أو مكوناتها يمكن معرفتها عن طريق تسميتها ، أو عن طريق تعيين خاصة أو أكثر تحدد الأفراد التى تنتمى إلى المجموعة .

فاذا كان لدينا مجموعة ما A بحيث كان X أحد أعضائها فاننا نعبر عن علاقة X بالمجموعه A بالقضية « X E A » ونقرأها « X is a member oF A . ولكل مجموعة ترتيب أو نظام order معين ، وقد تكون المجموعة متناهية Finite أو لامتناهية Infinite .

ويتحدث بول عما يسميه بالمجموعة الفارغة Null set والمجموعة الفارغة هى تلك التى ليست لها عناصر أو أفراد ، وهى تقابل الصفر ، ويرمز لهابالرمز ⌀ والحقيقة أن الدور الذى تؤديه المجموعة الفارغه فى نظام المنطق الرياضى هو نفس الدور الذى يؤديه الصفر تماما فى الحساب العادى . وهذة المجموعة تكافىء التناقض فى المنطق .

---

1 - Lass & Gottlieb : probability and statistics. p. 1.

التساوى بين المجاميع Equality of sets

يقال لمجموعتين A ، B أنهما متساويتان أو متطابقتان إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A له مايشابهه من عناصر المجموعة B والعكس بالعكس. وهذا هو ما يمكن التعبير عنه بالصياغة التالية :

X ε A implies that X ε B,

and X ε B implies that X ε A.

ويستخدم بول الرمز التالى <==> للاشارة إلى التضمن بين المجاميع، وعلى هذا يمكن صياغه ما سبق على النحو التالى :

$$A \varepsilon B \Longleftrightarrow (X \varepsilon A \Longleftrightarrow X \varepsilon B)$$

العلاقات بين المجاميع Relations between sets

وإذا ما انتقلنا إلى مسألة العلاقات بين المجاميع فى إطار نظرية جبر المنطق لبول لوجدنا أن هناك علاقتان أساسيتان بين المجاميع هما علاقه الاحتواء وعلاقة المساواة.

١ — علاقة الاحتواء Inclusion

يرمز بول لعلاقة الاحتواء بالعلامه ⊂ ، فإذا كانت B مجموعة فرعية للمجموعة A فإنه يمكن التعبير عن هذه الصيغة رمزيا فى الصورة التالية :

$$B \subset A$$

وتقرأ على النحو التالى « B is included in A »

وتكتب رياضيا على النحو التالى $B \supset A$

ومن ثم فان الصيغتان $B \supset A$ و $A \supset B$

متكافئتان .

وعلى هذا النحو يمكن لنا التعبير عن صورة القياس الأرسطى

سقراط انسان

كل انسان فان

∴ سقراط فان

بالصيغة الرمزية التالية :

$$A \subset B$$

$$B \subset C$$

$$\Longleftrightarrow A \subset C$$

٢ — علاقة المساواة Equality

وتساوى مجموعتين يعبر عنه بالصيغة :

$$A = B \text{ implies } A \subset B \text{ and } B \subset A$$

وبالعكس فان :

$$A \subset B \text{ and if } B \subset A \text{, then } A = B$$

ويمكن لنا أن نستنبط من الصيغتين السابقتين الأنواع التالية من العلاقات :

حيث كل مجموعة تكون مساوية لنفسها $1 - A = A$

حيث أن تساوى الجاميع متماثل $2 - A = B \Longleftrightarrow B = A$

$3 - A = B , B = C \Longleftrightarrow A = C$

حيث المجموعتان متساويتان ومتعديتان Transitive

قوانين الجمع للمجوعة :

والجمع المنطق يسير وفقا للقوانين التالية :ـ

I — Idempotent law of addition

$$A + A = A$$

2 — Commutative law of addition

$$A + B = B + A$$

3 — Assosiative law of addition

$$A + (B + C) = (A + B) + C \equiv A + B + C$$

4 — Absorption law of addition

$$\text{if } A \subset B \text{ , then } A + B = B$$

حاصل ضرب المجموعة :

والضرب المنطق يسير وفقا للقوانين التالية :ـ

1 — Idempotent law of multiplication

$$A A = A$$

2 — Commutative law of multiplication

$$A B = B A$$

3 — Assosiative law of multiplication

$$A (B C) = (A B) C \equiv A B C$$

4 — Absorption law of multiplication

$$A \subset B \Longleftrightarrow A B = A$$

هكذا كان بول متجها إلى الجبر أكثر من إتجاهه للنطق، فكانت رموزه تشير إلى ثوابت رياضية جبرية أكثر من إشارتها إلى ثوابت منطقية ، والحق أن الالتفات إلى الثوابت المنطقية بالذات أكثر من الالتفات إلى ثوابت الرياضة كان خاصية أساسية من خواص المذهب اللوجستيقى . كما أن جبر المنطق عند بول كان متجها أكثر إلى الجبر منه إلى المنطق فى طرق حل مسائله ، إذا كان بول يلجأ إلى تطبيق المعادلات الرياضية أو قواعد الحساب الرياضى دون قواعد المنطق وقوانينه ، كما كان بول يقبل تفسيرا عدديا فى استخلاص نتائج عملياته ، بل أنه حول قيمتى الصدق والكذب المنطقيتين إلى قيمتين عدديتين هما الواحد والصفر على التوالى .

وضع بول عام ١٨٤٧ أصول هذا المذهب مستعينا بما كتبه ليبنتز من قبل ، وبعد هذا تتابعت الأبحاث فى مناقشة هذا المذهب وتدعيمه فظهرت أبحاث ماكول Mac Coll وفن venn وجيفونز Gevons فى انجلترا ، وابحاث بيرس Pierce فى أمريكا وكتابات شرودر Schroeder فى ألمانيا وكانت نهاية هذه الأبحاث متمثلة فى البحث القيم الذى كتبه لويس كوتيرا L. Couturat عام ١٩٠١ وهو العام الذى أنتهت فيه أبحاث جبر المنطق بسبب ظهور المذهب اللوجستيقى بصورة متكاملة على يد رسل عام ١٩٠٣ ؛ ذلك المذهب الذى عكس الآية وقرر أن المنطق ليس جزءا لكل هو الرياضة وانما كل هو لجزء أسمه الرياضه * .

---

* للمزيد من البحث فى مذهب جبر المنطق عند بول يمكن للباحث أن يرجع إلى :

1 — S. A. Adelfio & C. F. Nolan. Principles and Applications of Boolean Algebra (Newyork 1964)

5 — F. Hobn : Applied Boolean Algebra (Mecmillan Newyork 1966)

8 — Kaye, Boolean Systems ((London 1968)

الطب الشعبي

فى مستهل هذا الفصل ... سوف لا نعيد هنا ـ على نحو أو آخر ـ مناقشة ما ورد حول ... الطب الشعبي فى المصادر العربية المختلفة . سواء القديم منها ... أمر كفانا مؤونته باحثون آخرون . وسنشير ... الى ... من عدة المصادر بالموضوع على نحو ما ... يتناول هذا الفصل ... سنحاول تقديم رؤية لموضوع الطب الشعبي من منظور آخر ، بالاعتماد على عدد من الدراسات الأجنبية الحديثة . التى نشرت مؤخرا حول هذا الموضوع . وذلك على النحو التالى :

(أ) نظرة عامة الى موضوع الطب الشعبي .

(ب)اهتمام الدوائر الصحية العالمية مؤخرا بالطب الشعبي والمطببين الشعبيين

ثم ... من دراسة « ماريوت » Marriott بشمال الهند ، ودراسة كلينمان ، Kleinman بتايوان . ودراسة « نختر » Nichter بجنوب الهند . بالاضافة الى دراسة « نوال المسيرى » بمصر . وتتضمن هذه الدراسات عددا من عناصر التحليل المتصلة بالموضوع ، منها

١ ـ شبكات المدلولات المرضية (Semantic illness networks) كيف تتحدد نظرة الناس للمرض ، وكيف يتشكل سلوكهم العلاجي فى اطار الواقع الاجتماعي والثقافى .

٢ ـ مستويات الطب الشعبي : الطب الشعبي الاحترافى ، الذى يمارس

عن أيدى معالجين محترفين ، والطب الشعبى المنزلى (home remedies) الذى يمارسه الناس العاديون بالاعتماد على أنفسهم ٠

٣ ـ الطب الشعبى والوضع الطبقى : الصلة بين الطب الشعبى وبين ثقافة الفقر ٠

٤ ـ الطب الشعبى والأولياء : نموذج للتداخل والارتباط بين موضوعات المعتقدات الشعبية بعضها وبعض ٠

٥ ـ الطب الشعبى والطب الرسمى : طرفان متصارعان على أرض الواقع الاقتصادى / الاجتماعى / الثقافى ٠

(جـ) ملاحظات عامة ، واستنتاجات نظرية ومنهجية ٠

أولا : نظرة عامة الى موضوع الطب الشعبى :

فى فصل بعنوان « الطب الشعبى » (١) ، قدم « دون يودر معالجة لهذا الموضوع ، ألقى خلالها «ضوءا على عدد من المفاهيم المتصلة به ، وعن التنويعات المتعددة فى داخله ٠ كما قدم لمحة تاريخية حول تطور البحث فى هذا المجال بأوروبا والولايات المتحدة ٠ بالاضافة الى تفاصيل أخرى تتعلق بطبيعة العلاقة بين الطب الشعبى والطب الرسمى ، وأوضاع الطب الشعبى فى الدول الصناعية المتقدمة ، سواء فى المدن الكبرى أو فى المجتمعات المحلية الريفية ٠ وسوف أعرض فيما يلى لأهم الأفكار الواردة عند « يودر » على النحو التالى :

(أ) حول المفاهيم المتصلة بالطب الشعبى ، وتقسيماته :

يذهب « يودر » الى أن الطب الشعبى بمعناه المتعارف عليه الآن يتصل

---

(١) Don Yoder; **«Folk Medicine»**, in : R.M. Dorson **(ed.)**; **Folklore and Folklife**, The University of Chiicago Press, Chicago, 1972; pp. 191-215.

وبديهى أن هذا التطور الكبير الذى طرأ على المنطق : موضوعا ومنهجا وغرضا لم يحدث فجأة ، إنما حدث على خطـــوات متتالية عرضنا لها تفصيلا فى الباب الأول من هذا الكتاب . كما سوف نقوم بدراسة مستفيضة فى الباب المقبل عن نظريات اللوجستيقا كما عرضها رسل وهوايتهد. ولكننا نكتفى الآن بذكر أن التطور فى ميدان الرياضة والذى صحبه تطور مماثل فى ميدان المنطق قد أدى إلى صلاحية المنطق « لأن تشتق منه الرياضة ، أو أن تكون الرياضة مجرد امتداد للمنطق وقوانينه وقضاياه » (١) .

٤ — المذهب الأكسيوماتيكى

عارض هذا المذهب الأخير مذهب جبر المنطق من جهة والمذهب اللوجستيقى من جهة أخرى ، فهو لا يرى أن الصلة بين المنطق والرياضة هى صلة الجزء بالكل كما ذهب إلى ذلك مذهب جبر المنطق ، كما لا يرى أن هذه الصلة هى صلة كل بجزء كما رأى أصحاب المذهب اللوجستيقى. وانما أتجه المذهب الاكسيوماتيكى اتجاها آخر وهو أن المنطق والرياضة نبعا معا من أصول أكسيوماتيكية لا هى منطقية وإلا كنا فى المذهب اللوجستيقى ولا هى رياضية وإلا كنا فى مذهب جبر المنطق، وإنما تميزت هذه الأصول بأنها عارية عن المنطق والرياضة معا ، أو أنها ذات طبيعة فوقية أعنى فوق المنطق والرياضة معا ولعل هذا يظهر تماما توازى المنطق مع الرياضة ، أو توازى الرياضة مع المنطق فلا تمايز بينهما ، كما يظهر أيضا الصلة الوثيقة الداخلية والبنائية بين العلمين الشقيقين ، حيث أن مصدرهما واحد هو الأصول الاكسيوماتيكية .

---

1 — Wilder, R. : Introduction to the Foundation of Mathematics. P. 219.

ولقد تزعم هذا المذهب ديفيد هلبرت أستاذ الرياضة بجامعة برلين حتى عام ١٩٤٥ ، فهو الذى وضع أساس النظرية الأكسيوماتيكية Axiomatic theory وجمع شتاتهـــا ، وكان يريد بها أن يناهض مذهب جبر المنطـــق والمذهب اللوجستيقى معا .

وهذا المذهب الأكسيوماتيكى يحتم علينا أن نبحث فى مسألة النسق الاستنباطى Deductive System الذى يبدأ بحدود أوليـــة ؛ هى الأصول أو المسلمات والتعريفات ، وعن هذه الحدود الاولية التى نقبلها قبولا دون طلب البرهنة عليها أو إقامة الدليل على صحتها ، نبدأ عملية الاستنباط ، ونحن نستنبط من هذه الحدود الأولية القضايا المشتقة التى نستخلصها فى نظام تسلسلى محكم بحيث تعتمد كل قضية لاحقة على ما سبقها ، وبحيث لا يختل نظام أو ترتيب أى قضية ، أو تترك موضعها لكى تحتله قضية أخرى ، وبحيث لا يستند فى البرهنة على أى قضية إلى أصول أو مسلمات أو قضايا خارجة عن تلك الموجودة فى إطار النسق الاستنباطى .

ولقد سار المنطق على هذا المنوال ؛ أى أقام نفسه على هيئة نظرية استنباطية ، وبالمثل فلقد حدث تطور هائل فى دائرة الرياضيات جعلها تقبل لأن تقام على هيئة نظرية استنباطية أيضا . إلا أن الهندسة وهى فرع من فروع الرياضة كانت تتبع فكرة النسق الاستنباطى ؛ فلقد بيّن أقليدس منذ القدم أن الهندسة يجب أن تقوم على هيئة نظرية استنباطية ، وهو قد حدد بالفعل بعض التعريفات الهندسية ، كما وضع بعض المسلمات ؛ وابتداء من هاتين المجموعتين استنبط كل نظرياته الهندسية ، كذلك آمن أرسطو بأن هناك من القضايا من لا يقبل البرهنة وهى هنا المسلمات والتعريفات ، وأن هناك من القضايا من تكون البرهنة عليها وإقامة الدليل على صحتها أمرا ضروريا . كذلك ذهب الكثير من المناطقة والرياضيين

والمفكرين إلى أن العلوم لكى تكون بالغة الدقة واليقين يجب أن تكون رمزية أولا كما يجب أن تحتوى على قضايا أولية وقضايا مشتقة ؛ الأولى لايبرهن عليها والثانية لا بد أن يتم البرهنة عليها وإقامة الدليل على صحتها .

أمر طبيعى أن يكون النسق الاستنباطى منطقيا إذا كانت مسلماته أو أصوله الأولى وتعريفاته خاصة بالمنطق، وأمر طبيعى كذلك أن يكون النسق الاستنباطى رياضيا إذا كانت هذه المسلمات وتلك التعريفات ذات طبيعة رياضية . وحينما استطاع المنطق واستطاعت الرياضة أن تتشكلا على هيئة نظرية استنباطية كانت نظرية جبر المنطق تضع الأصول الأولى فى هيئة جبرية، وكانت النظرية اللوجستيقية تضع أصولها الأولى فى هيئة منطقية ومن هنا كانت الصلة بين العلمين صلة كل بجزء أو صلة جزء بكل .

أما هلبرت فلم يرتض أن تكون هذه الأصول منطقية لذلك لم يرتض أن تكون رياضية ، بل ذهب خلافا للمذهبين السابقين إلى قبول حدود ومسلمات أولية أخرى لا هى إلى المنطق ولا هى إلى الرياضة ، وإنما هى مستبعدة تماما عن كل معنى ـ منطقى أو رياضى لأنها مجرد رموز اسمية Nominal ومن ثم تكون صورية خالصة Pure Formalism ، منها تشتق الرياضة والمنطق معا وهـــذه الحدود أو المسلمات الأولية سماها هلبرت بالأكسيوماتيك Axiomatic وبذلك سميت طريقته بالطريقة الأكسيوماتيكية وقد اشترط هلبرت لإقامة الأكسيوماتيك ثلاث شروط هى : ـ

أ ـ شرط الاستقلال ؛ ومعنى هذا الشرط أن تكون مسلمات النسق أو أصوله مستقلة عن بعضها البعض ، أى أنه لايجب أن يكون هناك تداخل بين مسلمة وأخرى . وهذا الشرط هام وأساسى لأنه لو تداخلت الأصول الأولى لأدى هذا

إلى تداخل وغموض فيما يتعلق بالقضايا التى نستبطها كلها من هذه الأصول الأكسيوماتيكية المتداخلة. فيجب إذن أن تكون المسلمات الأولى مستقلة تماماً عن بعضها البعض .

ب - شرط الاشباع : ويقصد بها هلبرت أن الحدود أو الأصول الأولى أو المسلمات يجب أن تكون كافية بحيث تسمح لنا باجراء كل عمليات الاستنباط فى النسق الموضوعة له. إلا أن هذا لا يعنى من ناحية أخرى أن تكون هذه الحدود أو الأصول الأولى أكثر مما يجب ، لأنها لو كانت أكثر مما يجب لأدى الامر إلى تعدد لاحاجة له ، وإلى تعطيل بعض الأصول الأولى عن الاستفادة منها . ومعنى هذا كله أن المسلمات أو الاصول الموضوعة الأولى يجب أن تكون كافية للاستنباط بحيث لا تزيد ولا تنقص ، لأنها لو نقصت لما أمكن أتمام عمليات الاستنباط ، ولو زادت لتعطلت بعض الأصول التى لا حاجة لنا إليها .

جـ - شرط عدم التناقض : ويعنى هلبرت بهذا الشرط أن مسلمات النسق أو أصوله الأولى يجب أن تكون غير متناقضة فيما بينها وهذا الشرط شرطا هاماً، لأنه لو كانت الأصول الأولى متناقضة فيما بينها لكانت القضايا المستنبطه من هذه الأصول متناقضة أيضا .

وبهذا الشرط الأخير يكون هلبرت قد عاد إلى المنطق مرة أخرى مع أنه قرر أنه يريد إقامة مذهبه الإكسيوماتيكى أبتداء من أصول لا هى منطقية ولا هى رياضية : ومعنى هذا أن هلبرت بهذا الشرط الأخير قد تناقض فى أقواله من حيث أن ضمن أصوله شرطا منطقيا .

والحق أن أبحاث هلبرت هذه رغم أنها قد أثارت الكثير من النقاش والحوار بين المنطقيين والرياضيين على حد سواء ، ورغم أنها أسهمت أسهاما كبيرا فى

فى توضيح أسس المنطق الرياضى ، إلا أن أبحاثه تلك لم يكتب لها الاستمرار ولم يعد يقبلها الكثيرون ، بل وتضاءلت أمام التقدم الهائل الذى أحرزه المذهب اللوجستيقى بفضل سيطرة آراء رسل، وازدياد الابحاث اللوجستيقية، وانتشار هذه الأبحاث فى المجالات المتخصصة ومن أهمها مجلة المنطق الرمزى Symbolic Logic التى ظهرت فى أمريكا وغيرها من المجلات فى جميع الأوساط المنطقية الرياضيـــة .

٥ — المذهب الحدسى

إذا كان مذهب جبر المنطق قد قرر أن المنطق جزء من الرياضة وتابع لهـا ، وكان المذهب اللوجستيقى يقرر أن الرياضة جزء من المنطق وامتداد له ولقضاياه وقوانينه . وكان المذهب الاكسيوماتيكى يقرر أن الرياضة والمنطق معا قد نبعـا بتواز كامل من أصول أكسيوماتيكية لاهى منطقية ولاهى رياضية . فان المذهب الحدسى يقف هنا موقفا مخالفا لهؤلاء إذ أنه يرى أن الأصول حدسية والعـرض منطقى . أى أننا نحدس أصول الرياضة ومنابعها مباشرة بواسطة الحدس ثم يجىء بعد ذلك دور المنطق فى بسط وعرض ما حدسناه .

وهذا المذهب الحدسى Intuitionism اعتنقه رياضيون معاصرون من أمثال بوريل Borel وبوانكاريه Poincaré ولوبيج Lebesque وبير Baire فى فرنسا، وبرووور L. E. j Brouwer وفايل weyl وهيتنج Heyting فى ألمانيـا . ولقد اتفقوا جميعا على معارضة المذهبين اللوجستيقى والاكسيوماتيكى . يقول ويلدر « لقد ظهرت خلال النصف الأول من القرن الحالى ثلاث مدارس تحاول الكشف عن أصل وطبيعة الرياضيات وهى المدرسة اللوجستيقية ، والمدرسة الحدسية ،

والمدرسة الأكسيوتيكية وقاد المدرسة الحدسية برووز وتلامذته الذى تناول نقد قانون الثالث المرفوع فى مقال ظهر له عام ١٩٠٨ ، [1]

ويرى أصحاب المذهب الحدسى أن الرياضيات تقــوم على أساس إدراك الاعداد الأولية بالحدس المباشر[2] وأن الرياضة تقوم على أساس مــن التوليد الذاتى Self - generation الذى يبدأ بالحدس ، وطالما أن الرياضة ذات أصول حدسية فانها من ثم لاتعتمد على اللغة . يقول هيتنج « أن الرياضيات مستقلة عن اللغة ، ويقرر أن « الرياضة وهى حدسية المنبع تتكون من أفكار عقلية ، وأن النظرية الرياضية تعبر عن واقعة حدسية متغلغلة فى باطن فكرنا ؛ فحينما نقرر أن ٢ + ٢ = ٣ + ١ فإننا نعنى أن تكوينا الفكرى قد حدس أن ٢ + ٢ تؤدى إلى نفس نتيجة ٣ + ١

وينبغى أن نلاحظ أن أنصار المذهب الحدسى هنا يعولون على الحـــدس بالاعداد وليس الحدس المكانى ، وهذا يشير إلى أن هؤلاء قد رفضوا رفضا قاطعا مسألة الحدس المكانى هذه والتى رفضها الرياضيون بعد ظهور الهندسات اللا أقليدية

المنطق الحدسى The Intuitionist Logic

يلعب المنطق هنا دورا هاما فى بسط وشرح ما توصل إليه الحدسيون فى حدوسهم الرياضية التى تتوافق مـــع الجانب الدقيق من الفكر . ولقد رفض الحدسيون مبدأ الثالث المرفوع وما ينتج عنه من أن نفى النفى إثبات أو أن كذب الكذب ينتج عنه الصدق ؛ فكذب كذب القضية P يتضمن P ، فأذا كان كذب

1- Wilder; R.; Introduction to the Foundation of Mathematics p. 246
2- Ibid : p. 247.

P يؤدى إلى الكذب ، فان تكذيب كذبها يكون صادقا . وقد عبر رسل عن مثل هذا بالصيغة التالية :

$$\vdash . \sim (\sim P) \supset P$$

وذهبوا إلى أن القانون الحدسى المباشر هو قانون عدم التناقض وليس قانون الثالث المرفوع ، وذلك لأنهم رأوا أن حدسنا المباشر لايقبل التناقض أما فكرة نفى النفى اثبات التى تظهر فى قانون الثالث المرفوع فليست حدسا مباشرا واضحا وأنما تحتاج إلى خطوة أكبر من الحدس المباشر. وعلى هذا النحو يفرق الحدسيون بين قانونى عدم التناقض والثالث المرفوع ويرون أنهما غير متساويين كما ذهب إلى ذلك رسل فى مبادىء الرياضيات ، حيث يذهب رسل إلى أن P متساوية مع $\sim (\sim P)$.

المنطق الرمزى عند الحدسيين :

لعل أول من قدم تحليلا واضحا من بين الحدسيين للمنطق الرمزى أو الرياضى هو هيتنج وسوف نحاول الآن ابراز منطقه الرمزى كما وصفه هو :

أولا : يضع هيتنج الرموز التالية :

١ — $\wedge$ ثابت الوصل Conjunctiou وتعبر عنه اللوجستيقا بالرمز « . »

٢ — $\vee$ ثابت الفصل disjunction وتعبر عنه اللوجستيقا بنفس الرمز.

٣ — $\neg$ ثابت النفى negation وتعبر عنه اللوجستيقا بالرمز $\sim$.

٤ — $\supset$ ثابت التضمن Impiication وتعبر عنه اللوجستيقا بنفس الرمز.

ثانيا : هذه الرموز السابقة مستقلة تماما عن بعضها البعض فـ $a \supset b$ ليست هى $\neg a \vee b$ كما زعمت اللوجستيقا حينما قررت أن التضمن $p \supset q$ هى نسها $\sim p \vee q$.

ثالثا : يعبر عن قانون التناقض فى مثل هـــذا المنطق الرمزى الحدسى بالصيغة التالية :

$$\vdash . \neg (a \vee \neg a)$$

رابعا : أما قانون الثالث المرفوع فقد أهمله هيتنج على الرغم من أن صيغته يمكن أن تكون :

$$\vdash . \neg \neg (a \vee \neg a)$$

كما يمكن أن يصاغ بصيغة أخرى هى :

$$\vdash . a \supset \neg \neg a)$$

وباستخدامنا لثابت النفى يمكن أن نحصل على الصيغة التالية :

$$\vdash . \neg \neg \neg a \supset \neg a$$

وإذا عكسنا الوضع يمكن أن نحصل على الصيغة التالية :

$$\vdash . \neg a \supset \neg \neg \neg a$$

خامسا : يمكن أن نحصل على ثابت المساواة بمجرد التفكير فيما سبق حيث أن $\neg a$ مساوية لـ $\neg \neg \neg a$ ، كما يمكن الحصول على ثابت الفصل بأن نقبل $\neg \neg a$ أو $\neg a$ ، وهـــذه يمكن وضعها فى الصيغة التالية :

$$\neg \neg a \vee \neg a$$

واخوتها من ذوى المستويات التعليمية العليا ويشغلون وظائف كبيرة بالدولة.
انقسموا على أنفسهم فى الرأى . فبعضهم يرى عن اقتناع وتحمس أن يحضروا لها أحد المشايخ المعروفين « بالبركة والنفس الطاهر » لكى يتدخل فى أمر علاجها . والبعض الآخر يعارض ذلك على أساس أن التصرف يجب أن يتم بأسلوب منطقى وعقلانى ولا داعى لمثل هذه الخرافات .

أن يتم بأسلوب منطقى وعقلانى ولا داعى لمثل هذه الخرافات .
المعروف عنهم سمات الولاية ، وهو معروف لدى جميع أفراد الأسرة ويتردد عليهم كثيرا . كما أن المريضة من أشد الناس اعتقادا فى « بركة » هذا الرجل. دخل هذا الشيخ حجرة المريضة ، وظل يخاطبها بعبارات تبعث على الأمل فى الشفاء ، مع تكرار الدعاء لها . ثم انصرف بعد فترة . وفى تلك الليلة ظهرت بوادر تحسن على حالة المريضة ، حيث استطاعت تحريك يدها . وهنا ظن أفراد الأسرة أن الشفاء قد بدأ يتحقق على يد هذا الشيخ ، فأخذوا يهنئون أنفسهم على ذلك ، كما سارع بعضهم الى ابلاغ هذا النبأ للأقارب والأصدقاء عن طريق التليفون . وكانت تعليقات الكثيرين ممن سمعوا بذلك تكشف عن دهشة وحيرة . حتى أن بعضهم صرح بأنه سوف يراجع موقفه من الأولياء ، اذ أن ما حدث يجعله يصدق ما يسمعه عن كراماتهم بعد أن كان لا يصدق ذلك . غير أن حالة المريضة لم تلبث أن عادت الى ما كانت عليه من قبل ، بل ازدادت سوءا . فما حدث لم يكن سوى استجابة للايحاء الذى لعب الشيخ دورا فيه .

أما عن ردود الفعل داخل الأسرة ، فقد دافع البعض عن الشيخ ، بمعنى أن بركته قد تحققت « ولكن الله لم يأذن بالشفاء بعد » . وأما البعض الآخر ، فقد أخذ يؤكد ثباته على موقفه من أن فكرة المشايخ ضرب من الخرافة . غير أن ما يعنينا من ذلك كله هو ثلاث ملاحظات . تتعلق الأولى منها بالتباين فى اتجاهات أفراد الأسرة ومواقفهم من الأولياء . فمنهم يعتقد بحماس ، ومنهم من يستهجن . وتتعلق الثانية بتداول نبأ تحسن حالة المريضة على يد الشيخ . وتصريح البعض بأنهم سيعدلون من مواقفهم حول الأولياء . وتتعلق الملاحظة الثالثة بالجوانب السيكولوجية المتصلة بالمرض ، وقابلية المريض للايحاء .

... : حول الجوانب السيكولوجية المتصلة بالاعتقاد في الاولياء :

اثناء مشاركة الباحث في مولد الحسين . بالقاهرة . . ل الفترة من ٣ وحتى ٤ / ٤ / ١٩٧٨ ، للوقوف على ما يجرى من ممارسات في . . . تجمعت لديه بعض الملاحظات التى تتصل بالجوانب السيكولوجية . . . الممارسات . ومن هذه الملاحظات ما يتعلق بالوظائف . . . . . . يتعلق بموضوع النذور . وسوف أقيم بعض هذه الملاحظات في . . . (٢) .

. . . أسرة . . . من احدى قرى . . . فظة دمياط . . . بصحبة امرأة مريضة بالشلل الكلي حيث كانت فاقدة . . . . . . وكانت هذه المريضة ممددة على أحد أرصفة ميدان . . . وحولها أفراد أسرتها المكونة من الزوج . . . ـ ٥٥ سنة . . . متزوجة . ٣٥ سنة) ، وزوجها (أمى ـ ٤٠ سنة . وقد أجريت مقابلة مع هذه الأسرة تبين منها ما يلى :

١ ـ أن هذه الأسرة تنتمى الى فئة أشباه المعدمين . فالزوج يملك ثلاثة أرباع الفدان ، وزوج الابنة مستأجر لفدان وثلاثة قراريط .

٢ ـ أن المريضة أصيبت بالمرض منذ حوالى خمسة أشهر ، وأنهم عرضوها على أطباء بمدينة دمياط ومدينة المنصورة ولكن العلاج لم يأت بنتيجة .

٣ ـ أنهم بعد شهر من اصابتها بالمرض ، وعرضها على الاطباء دون ظهور بوادر تدل على تحسن حالتها أخذوا قطعة من « أثرها » وذهبوا بها الى أحد « المشايخ » (السحرة) بقرية من القرى ، ولكن الشيخ نصحهم بالاستمرار فى علاجها حسب تعليمات الأطباء .

٤ ـ أخذوا يفقدون الأمل فى شفائها . وخاصة بعد أن طالت فترة المرض والعلاج التى استدانوا خلالها مبالغ كثيرة .

ـــ مجموعة من الصور الفوتوغرافية . . . حيات . . . . . .

الباب الرابع

نظريات المنطق الرياضى

الفصل الأول : نظرية حساب القضايا .

الفصل الثانى : نظرية حساب المحمول .

الفصل الثالث : نظرية حساب الفصول .

الفصل الرابع : نظرية العلاقات .

الفصل الأول

نظرية حساب القضايا
(اللوجستيقا)

سبقت لنا الاشارة فى الاجزاء المتقدمه أن ثمة أفكارا جديدة أدخلها المحدثين من المناطقة إبتداء من عصر ليبنتز إلى عصر فريجة ، لكن لم يكن هذا يعنى بطبيعة الحال أن النسق المنطقى إنما تطور تطوراً هائلا خلال هذه الفترة فحسب ، وإنما وجدنا الكثير من المحدثين خاصة مدرسة المنطق البولندى المعاصر يان لوكاشيفتش؛ يؤكد أهمية آراء أرسطو المتعلقه بالنسق المنطق المعاصر ، ذلك أن لوكاشيفتش كشف لنا عن نقاط القـــوة فى المنطق الصورى الأرسطى فيما يتعلق بالمتغيرات والثوابت وسور القضية ، فضلا عن إدراكه التام لصورة التضمن فى القياس ؛ رغم أن التضمن عرف بصورة أكثر وضوحاً فى عصر متأخر عن العصر الأرسطى.

وهنا يمكن لنا أن نستنتج أن تطور المنطق الرياضى المعاصر إنما قد سار فى ثلاث إتجاهات متوازية إبان طور الشباب . الإتجاه الأول حاول التنقيب عن الاصول التى انحدر منها ، وقد تمثل هذا الإتجاه فى لوكاشيفتش ومدرسة. والإتجاه الثانى حاول أن يخضع تطور المنطق لأبحاث الرياضيات المعاصرة فى آخر اشكالها، وانتهى إلى اشتقاق الرياضية والمنطق معـا من مجموعة واحدة من الأصول المنطقية، بحيث إستحال الفصل بين المنطق والرياضيات بصفة نهائية ، وهذا ما يفصح عنه كتاب « مبادىء الرياضيات » لرسل وهوايتهد . أما الإتجاه الثالث فبقدر ما أخذ

عن اتجاه رسل وهوايتهد ، يخضع المنطق تماما للرياضيات ويرى فيه طوراً بدائيا من أطوار الرياضية ، وتصبح القضية الرياضية فى متن مذهبة هى الأصل والأساس الأول ، وليس هناك ثمة منطق ، بل الصدارة للرياضيات ، ويعبر عن هذا الإتجاه كل من « جودل » و « كاسيرر » .

ونحن وإن كنا نقيم قضيتنا الأساسية فى هذا البحث على كل من الإتجاه الأول والثانى معا ، إلا أنه ينبغى أن نشير إلى أن الإتجاه الثالث قد أفضى إلى نواحى تطبيقية هامة للمنطق الرياضى المعاصر فى الفيزياء المعاصرة . وهذا ما لن نتناوله هنا ، بل سنجعلة موضوعا لدراسة مقبله .

هل تمكن الإتجاه المنطق الرياضى المعاصر فى بداية القرن العشرين من صياغة أصول وقواعد حساب القضايا صياغة دقيقة من الناحية المنطقية والرياضية معا ؟

الحقيقة أن حركة تطور المنطق الرياضى فى بداية القرن العشرين كانت موضع دراسة الفيلسوف المنطقى الرياضى المعاصر برتراند رسل ، ذلك أن رسل بعد أن ساهم فى مؤتمر باريس الرياضى عام ١٩٠٠ أتيحت له الفرصة ليقف على اعمال جهابذه علماء المنطق والرياضة معا وفى مقدمتهم « جيوسيب بيانو » الإيطالى ، فقد تميز بيانو بقوة الحجة والبرهان ودقة تحليلاته الرياضية والمنطقية مما أثار فضول رسل الذى إنكب على دراسة مؤلفاته ليقف على دقائق اعماله . وبعد أنعاد رسل إلى إنجلترا إنصرف إلى البحث فى أصول الرياضيات بمكامنها ، فأخرج لنا فى عام (١٩٠٣) « أصول الرياضيات » وقد كان عملا عبقريا فذا وفريداً ، تتلمذ علية الرياضيين والمناطقة لاجيال طويلة . إلا أن هذا لم يكن ليعنى أن صياغة المنطق الرياضى قد تبلورت بصفه نهائية فى أصول الرياضيات ، ذلك أن رسل يؤكد لنا فى فترة لاحقة على الأصول ـ أى فترة ما بعد كتاب المبادىء ـ

أن قيمة أصول الرياضيات إنما هي قيمة تاريخية فقط لأنه يعبر عن فترة معينة في تطور المنطق الرياضي [١].

تتأسس الدعوى الاساسية اذن في كتاب الأصول على رد الرياضيات إلى أصول منطقية، وامكانية الوقوف على تطابق المنطق والرياضيات معا. لكن بعد أن تأكد الرياضي هوايتهد من أصالة تلميذه رسل في مجال البحث الرياضي والمنطقي، نشأت فكرة التعاون المشترك بينهما في مجال المنطق الرياضي، فكان كتاب « مبادىء الرياضيات » ثمرة جهد وتعاون مثمر لهما معا.

والحقيقة التي لا تقوى دعوى الخصوم على دحضها أن كتاب البرنكيبيا Principia يعد بمثابة انقلاب خطير في أبحاث المنطق والرياضيات على السواء « فقد لعب دوراً هاما في تطور المنطق الرياضي » [٢]، ومن ثم فإن إصدار هذا العمل لم يكن بمثابة أمر عرضي، بل دفعت الضرورة والحاجة إليه لتدعيم المنطق على أساس تزويده بالابعاد اللازمة للحركة في آفاق جديدة، فضلا عن كونه قد خلع على الرياضيات ثوبا جديدا في شتى أبحاثها.

انتهى رسل وهوايتهد في « المبادىء » إلى اشتقاق الرياضيات بأسرها من مجموعة بسيطة من القضايا الابتدائية Primitive Propositions تعتبر بمثابة أصول الاشتقاق بالنسبة للرياضيات، وبالتالي فقد أنجزا في هذا المضمار عملا مزدوجا:

---

(1) Russell., The Principles of Mathematics, Introduction, 2 nd edition, 1937 .

(2) Ayer, A. J., An apprisal of Bertrand Russell's, Philosophy p. 171 .

الأول : أن الرياضيات يمكن أن تشتق من أصول منطقية بحتـــه Pure Logical Axioms

الثانى : أنه قد اتضح لنا من خلال هذا العمل الضخم أن الاستنباط deduction هو أساس رد الرياضيات إلى المنطق .

ومن ثم وجدنا كتاب المبادىء يمثل لنا مرحلة تاريخية وفكرية حاسمة فى تطور المنطق الرياضى ، ذلك أنه يجىء فى مفـترق الطرق بالنسبة للأبحاث المنطقية والرياضية على السواء ، ومن ثم فهو يقسم تاريخ المنطق الرياضى إلى قسمين ، « ما قبل المبادىء » ، « وما بعد المبادىء » ، وتفسير هذا أن التصورات المنطقية التى تم التعبير عنها باللغة فى كتاب الأصول أمكن التعبير عنها تعبيراً رمزيا فى صيغ نهائية فى « المبادىء » ، فأصبح المنطق يتحرك من خلال نسق متكامل من الرموز ، حيث تتآزر الثوابت والمتغيرات معا فى نسق واحد . وما عجز الفكر عن إدراكه من حقائق فى كتاب المبادىء عالجه لنا رسل بالشرح والتفسير فى « مقدمة الفلسفة الرياضية » (١٩١٩) .

يمكننا الآن أن نتتبع تحليلات كتاب « المبادىء » فى جانبها المنطق الرياضى، حيث نجد المنهج الإستنباطى يعتمد على ثلاثة أمور أساسية : ـ

أولا : أن النسق الاستنباطى deductive System « لمبادىء الرياضيات » يعتمد فى كل أجزاءه اعتماداً واضحـــا على مجموعة الأفكار الابتدائية التى تنتمى إلى النسق .

ثانيا : أن النسق الإستنباطى شيد على أساس مجموعة من الرموز الأساسية Basic Symbols تمثل فى جوهرها أعلى درجات الصورية Formality بالنسبة لكل من الرياضة والمنطق ، والتى يكون كلاهما وفقا لها .

ثالثاً : أن الجزء الخاص بحساب القضايا فى النسق الاستنباطى لمبـــادىء الرياضيات يعتمد بصفة مباشرة على مجموعة من القضايا الإبتدائية ، تلك التى لها بداهة قوانين الفكر الأساسية فى المنطق الصورى .

وحتى يمكننا الوقوف على أصول نظرية حساب القضايا فى المذهب الوجستيق لابد لنا وأن نلقى الضوء على الطريقة التى أتبعت فى الجهاز الرمزى لإجراء حساب القضايا .

أولا ـ المبادىء الأساسية التى يعتمد عليها النسق الاستنباطى

إذا كان النسق لمنطق لمبادىء الرياضيات يستند إلى نظرية الاستنباط، حيث نستنتج نتائج Conclusions من مقدمات Premisses ، فإن الإستنباط فى كتاب المبادىء يعتمد فى جوهره على علاقه التضمن Implication بإعتبارها علاقة أساسية.

ومن المعروف أن فكرة التضمن فكرة قديمة أدراكها أرسطو وهو بصدد تشييد نظريتة فى القياس، بل وأقام القياس على أساسها ، وفق رأى « لوكاشيفتش » الذى نأخذ به. إلا أن الفكرة ترجع بصفة مباشرة إلى « سكتوس إمبريقيوس » الذى كان أول من أشار إلى طبيعة علاقة التضمن (١).وقد عرف « تشارلزبيرس» فوائد التضمن المادى ، الا أن رسل «كان أول من اكتشف أن نسق المنطق ككل يمكن أن يتطور من خلالها (٢)

يميز رسل بوضوح بين الاستدلال Inference والتضمن Implication حيث أن كل منهما يختلف عن الآخر من حيث طبيعته المنطقية ، فالتضمن عملية

---

(1) Reichnbach, H., Bertrand Russell's Logic, P. 28, Schilpp vol

(2) Ibid .

تربط بين قضيتين معا وتفضى الى قضية جديدة ، على حين أن الإستدلال عملية تجرى على القضايا . ومن ثم فإن النسق الاستنباطى ككل لابد وأن يحتوى بين مقدماته العديدة خصائص التضمن التى تسمح بقيام عملية الاستنباط (١) .

والنسق الاساسى للاستنباط يقوم بصفة نهائية على أربع حقائق ضرورية لقيام عملية الإستنباط هى : ـ

(١) أن نسق كتاب المبادى يقوم على أساس الاشارة للقضايا بحروف لاتينيه صغيره (٢) Small lattin letters مثل p ، q ، r . واستخدام الرموز هنا يحقق فائدة عملية كبيره ، اذا أنها تقوم مقام اللغه لتوضح الصورة المنطقية على نحو دق ، فضلا عن أن الرمز فى حد ذاته يعبر عن درجة عليا من درجات التجريد الفكرى لأنه يحيل القضية المنطقية الى صورة رياضية بحته ، هذا الى جانب ما للرموز من خصائص هامه تتمثل فى إمكانية التداول العالمى . وهنا تتغلب على صعوبات التفاهم بين اللغات المختلفة ، وبذا فهى توفر لنا قدرا كبيرا من الجهد والوقت المطلوب فى اللغة .

(٢) أن كل قضية مقررة asserted أى مثبتة (صادقة) من قضايا النسق نجدها مسبوقة بعلامة التقرير assertion والتى يرمز لها فى كتاب المبادىء بالرمز (⊢) . وقد استعار رسل وهوايتهد علامة التقرير من فريجة . إلا أن

---

(1) Russell, My Philosophical Developmnet, P. 74 .

(٢) نفضل فى هذا الصدد أن نبقى على استخدام الحروف اللاتينيه لانه إن أمكننا تعريب رموز القضايا ، فلن نتمكن من تعريب الثوابت المنطقية التى تقوم بينها ، فضلا عن أن النظريات التى نقدمها فى هذا المؤلف هى مما يهم المتخصصين من المناطقة والرياضيين .

فتجنشتين من بين المعاصرين من المناطقة ، يؤكد لنا فى « رسالته المنطقية الفلسفية » Tractatus logico Philosophicu- ليست لها أى معنى بل أنها خالية من المعنى ذلك أنها لا تتعلق بالقضايا ، بل تتعلق أساساً بفكرة ترقيم القضايا ، ومن ثم فإن القضية لا يمكن أن تقرر صدق ذاتها (١) . والحقيقة أن نقد فتجنشتين لعلامة التقرير فى منطق رسل وفريجة من قبله ، يجانبه كثير من الصواب لأنه طالما أننا نتحدث عن عملية برهانية فسيتبين لنا من ثنايا خطوات البرهان الرياضى الذى يجرى على القضايا ، ما إذا كانت القضايا صادقة أم لا ومن ثم فإننا سنلتزم أساساً بخطوات البرهان المتبعة مستبعدين علامة التقرير التى تسبق القضية .

(٣) كما ويعتمد النسق الإستنباطى لحساب القضايا ككل على مجموعة من الثوابت المنطقية التى يقوم عليها الإشتقاق . وهذه المجموعة من الثوابت تتمثل فيما يلى : -

ا - ثابت السلب negation

ويرمز له بالرمز ∼ ويقرأ not . فاذا كانت لدينا القضية p فان دالة سلبها يعبر عنهـا بالصيغة ∼p وتقرأ « not - P » . فاذا كانت القضية p صادقة كانت ∼p كاذبة ، واذا كانت ∼p صادقة كانت p كاذبة .

ب - ثابت الفصل disjunction

ويرمز له بالرمز v ويعنى or . فاذا كانت لدينا قضيتان p , q ارتبطتا معا بثابت الفصل ، فان القضية الجديدة المؤلفة منهما معا تأخذ الصيغة « p v q »

---

(1) Wittgenstein., Tractatus logico - Philosophicus 4.444

وتقرأ « p or q » . وتصدق « p or q » معا اذا كانت p ، q صادقتان معا أو إحداهما صادقة والأخرى كاذبة ، لكنها تكذب فى حالة كذبهما معا .

هـ - ثابت الوصل Conjunctin

ويرمز له بالرمز (.) ويقرأ « and » . فالقضيتان p ، q حينما يرتبطان معا بثابت الوصل « p . q » - وتقرأ هذه الصيغة p and q - فان الصيغة المؤلفة منهما معا تصدق فى حالة صدق كل من p ، q معا وتكذب فى حالة كذب إحداهما على الأقل .

و - ثابت التضمن Implication

ويرمز له بالرمز ⊃ ويقرأ imply . فاذا ما إرتبطت p ، q معا فى الصيغة « p ⊃ q » فاننا نقرأ الصيغة كلها « p imply q » . وهذه الصيغة تصدق فى ثلاث حالات هى : -

. اذا كانت p صادقة ، q صادقة .
. اذا كانت p كاذبة ، q صادقة .
. اذا كانت p كاذبة ، q كاذبة .

وتكذب فى حالة واحدة فقط هى :

. اذا كانت p صادقة ، q كاذبة .

ﻫ - ثابت التكافؤ Equivelance

ويرمز له بالرمز ≡ ، ويقرأ Equivelant . والصيغة المؤلفة من p ، q معا هى « P equivelant q » . وتصدق قضية التكافؤ فى ثلاث حالات هى : -

- اذا كانت p صادقة ، q كاذبة .
- اذا كانت p كاذبة ، q صادقة .
- اذا كانت p كاذبة ، q كاذبة .

لكنها تكذب فى حالة صدقها معا .

وينبغى أن نذكر أن شيفر shiffer اقترح على رسل استبدال التكافؤ ، بعدم الإتفاق Incompatibility الذى يرمز له بالرمز \ أى stroke ، كما أوضح أنه من الممكن إقامة نسق كتاب المبادىء باسره على أساس ثابت عدم الاتفاق ، وقد ترك له رسل إعادة صياغة « مبادىء الرياضيـــات » مرة ثانية وفق هذه الفكرة ، لكن شيفر لم يفعل ذلك ، ولم يقدم أحد من المناطقة أو الرياضيين على مثل هذه المحاولة . والحقيقة أن صياغة كتاب المبادىء مرة ثانيه باستخدام هذا الثابت إنما يقتضى تعاون جيل كامل من الباحثين ، فضلا عن أن شيفر لم يتنبه إلى أننا حتى لو تمكنا من هذه الصياغة فلن نستطيع أن نستغنى بصفة نهائية عن ثوابت السلب والوصل والفصل ، ذلك أن عدم الاتفاق يعرف بدلالة هذه الثوابت .

$$p \backslash q = \sim (p \cdot q)$$

$$p \backslash q = \sim p \vee \sim q$$

وربما كان هذا الأمر هو الذى دفع رسل فى الطبعه الثانية « البرنكيبيا » لان يرد جميع هذه الثوابت ويختصرها إلى ثلاثة فقط هى السلب والفصل وتعريف التضمن بدلالة السلب والفصل معا .

$$p \supset q = \sim p \vee q$$

(٤) أن النقط dots فى الجهاز الاستنباطى تستخدم لتحديد مجال القضايا وهى تقوم مقام الأقواس ، ومن ثم فهى جزء من الجهاز الرمزى المستخدم . لكنه يمكن لنا نستغنى عن النقط بإستخدام الأقواس وفقا لما هو متبع فى الرياضيات حتى لا يحدث أى نوع من الإختلاط بين مجال القضايا المختلفة .

ثانيا القضايا الابتدائية التى يعتمد عليها النسق الاستنباطى

القضايا الإبتدائية الموضوعة فى أساس النسق الاستنباطى هى قضايا أفترضت أصلا بدون برهان عليها [١] ، وقلة عدد هذه القضايا وبساطتها فى أى نسق منطقى ، هى التى تكسب النسق الإستنباطى أهمية وقوته الاستنباطيه .

ويرمز للقضية الإبتدائية فى « المبادىء » بالرمز Pp أى Primitvie Prosoposition وقد أستعار رسل هذا المصطلح من بيانو [٢] Peano . وتنحصر هذه المجموعة من القضايا الابتدائية فى القضايا الآتية [٣] :

١ — مبدأ تحصيل الحاصل Principle of Tautology

$$1.2 \quad (p \vee q) \supset p$$

أى أنه إذا كانت p قضية صادقة أو p صادقة فإن p صادقة

٢ — مبدأ الاضافة Principle of Addition

$$1\cdot3 \quad q \supset p \vee q$$

إذا كانت q صادقة فإن p أو q صادقة

(1) Russell & whitehead : Principia , P. 12

(2) Ibid, P, 94

(3) Principia , PP. 96-97

٣ — مبدأ التعديل Principle of Permutation

$$1.4 \quad (p \vee q) \supset (q \vee p)$$

فإذا كانت p أو q صادقة فإن q أو p صادقة

٤ — مبدأ الترابط Associative Principle

$$1.5 \quad [p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$$

إذا كانت إما p صادقة أو « q أو r » صادقة ، فإذن تكون q صادقة أو « p أو r » صادقة .

مبدأ الجمع Principle of Summation

$$1.6 \quad (q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$$

أى إذا كانت q تتضمن r ، فإن « p أو q » تتضمن « p أو r »

وينبغى أن نلاحظ أن هذه المجموعة من القضايا تعد بمثابة أصول الاشتقاق فى النسق الإستنباطى لكتاب المبادىء ، وتستند نظرية حساب القضايا عليها لانها تمثل الصدق المنطقى الإبتدائى إلا أن هناك مجموعة من القضايا المشتقه سواء ما كان منها بسيطا أو مركبا ، لا تعد بمثابة أصول الاشتقاق فى نسق المبادىء ، بل يمكن البرهنة عليها ، كما سنرى ، فى عرض طريقه البرهان الرياضى لنظرية حساب القضايا .

وطريقة البرهان فى نظرية حساب القضايا تسير وفق أحد طريقين :

الطريقة الاولى : تكون إما عن طريق إحلال صيغة محل أخرى فى صورة القضية (١ر٢) والتى تنص على أن .

$$(p \vee p) \supset p$$

يمكن أن نضع الصيغة ($p \vee q$) بدلا من p فنحصل على

$$[(p \vee q) \vee (p \vee q)] \supset (p \vee q)$$

الطريقة الثانية وتتمثل فى قاعدة أثبات التالى Modus Ponens والتى تقررها القضية (١ر١) والتى تنص على أن أى شىء تتضمنه قضية أولية صادقة يكون صادقاً،

1 1 Anything implied by a true elementary Proposition is true Pp

تلك هى القواعد الأساسية التى يسير وفقاً لها جهاز البرهنة الرياضية لنظرية حساب القضايا، وسنحاول تطبيق هذه القواعد على بعض صور القضايا الأساسية فى كتاب المبادىء .

برهن على أن

$$p \supset p \vee p$$

البرهان

فى القضية رقم (٣ر١) والتى تنص على أن

$$q \supset (p \vee q)$$

نضع p بدلا من q فى هذه القضية بموجب القاعدة الأولى من قواعد البرهان فنحصل على .

$$p \supset (p \vee q)$$

هـ . ط . ث

برهن على أن

$$p \supset p$$

البرهان

تنص القضية رقم (٥ ر٢) على أن

$$(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)] \qquad (١)$$

نستخدم القاعدة الأولى من قواعد البرهان ونضع (P V P) بدلا من q ، p بدلا من r . بالتعويض فى (١) ينتج أن

$$[(P \vee P \supset P)] \supset [\{P \supset (P \vee P)\} \supset (P \supset q)]$$

∵ القضيه الابتدائيه رقم (٢ر١) صادقه وتنص على أن

$$(P \vee P) \supset P \qquad (٢)$$

∴ من (١) ، (٢) ، والقضيه الابتدائيه رقم ١١ر١ نحصل على

$$[P \supset (P \vee P)] \supset (P \supset P) \qquad (٣)$$

، ∵ $(P \vee P) \supset P$ برهانا من القضيه السابق البرهنه عليها (٤)

∴ من (٢) ، (٣) ، (٤) وقاعدة إثبات التالى ينتج لدينا أن

$$P \supset P$$

هـ . ط . ث

برهن على أن

$$P \vee \sim P$$

البرهان

فى القضية الابتدائيه رقم (٤ر١) والتى تنص على أن

$$(p \vee q) \supset (q \vee p) \qquad (١)$$

نضع $\sim P$ بدلا من P ، P بدلا من q فى رقم (١) ينتج أن

$$(\sim P \vee P) \supset (P \vee \sim P) \qquad (٢)$$

، ∵ القضية $(\sim P \vee P)$ وهى القيضه رقم (١و٢) صادقة برهانا فى نسق المبادىء

∴ فباستخدام قاعدة إثبات التالى فى رقم (٢) ينتج لدينا

$$P \vee \sim P$$

هـ. ط. ث

برهن على أن

$$P \supset \sim P \supset \sim P$$

البرهان

فى القضية الابتدائية رقم (٢ر١) والتى تنص على أن

$$(P \vee P) \supset P \qquad (١)$$

نضع $\sim P$ بدلا من P فى رقم (١) ينتج لدينا أن

$$(\sim P \vee \sim P) \supset \sim P \qquad (٢)$$

، ∵ فى (١ر٠١) $(p \supset q) = \sim p \vee q$ تعريفا (٣)

نضع $\sim P$ بدلا من q فى (٣) ينتج أن

$$P \supset \sim P = \sim P \vee \sim P \qquad (٤)$$

بالتعويض فى رقم (٢) عن $\sim p$ بـ $p \supset \sim p = \sim p \vee \sim p$ ينتج أن

$$p \supset \sim p \supset \sim p$$

هـ. ط. ث

برهن على أن

$$\sim p \supset q \supset \sim q \supset p$$

البرهان

∵ القضية رقم (٢ر٠٥) تنص على أن

(١) $(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

، ∵ القضية رقم (٢ر١٢) ـ قانون النفى المزدوج ـ تنص على أن

(٢) $p \supset \sim(\sim p)$

، ∵ القضية رقم (٢ر٠٣) تنص على أن

(٣) $p \supset \sim q \supset q \supset \sim p$

بالتعويض فى رقم (١) عن قيمة p بالقيمة p ، وعن قيمة r بالقيمة $\sim(\sim q)$ ينتج أن

(٤) $[q \supset \sim(\sim q)] \supset [(\sim p \supset q) \supset \{\sim p \supset \sim(\sim q)\}]$

وبالتعويض فى رقم (٢) عن قيمة p بالقيمة q ينتج أن

$$q \supset \sim (\sim q) \qquad (٥)$$

من (٤) ، (٥) ، والقضية (١١ر١) ينتج أن

$$\sim p \supset q \supset \sim p \quad \sim (\sim q) \qquad (٦)$$

نعوض عن قيمة p بالقيمة p ~ ، وعن قيمة q بالقيمة q ~ فى رقم (٣) ينتج أن .

$$\sim p \supset \sim (\sim q) \supset \sim q \supset \sim (\sim p) \qquad (٧)$$

نضع q ~ بدلا من q ، (p _) ~ بدلا من q ، p بدلا من r فى رقم (١) ينتج أن

$$[\sim (\sim p) \supset p] \supset [\sim q \supset \sim \sim p) \supset (\sim q \supset p)] \qquad (٨)$$

، ∵ القضية رقم (٢ر١٤) تنص على أن

$$\sim (\sim p) \supset p \qquad (٩)$$

∴ من (٨) ، (٩) ، القضية رقم (١ر١١) ينتج أن

$$\sim q \supset \sim \sim p \supset \sim q \supset p \qquad (١٠)$$

بالتعويض فى رقم (١) عن قيمة p بالقيمة $(\sim p \supset q)$ ، وعن قيمة q بالقيمة $[\sim p \supset \sim (\sim q)]$ ، عن قيمة r بالقيمة $[\sim q \supset \sim (\sim p)]$ ينتج أن

$$[(\sim p \supset \sim\sim q) \supset (\sim q \supset \sim\sim p)] \supset [\{(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim(\sim q)\} \supset \{\sim p \supset q \supset \sim q \supset \sim(\sim p)\}] \quad (١١)$$

من رقم (٧) (١١) ، والقضية رقم (١١ر١) ينتج أن

$$[(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset \sim(\sim q)] \supset \sim p \supset q \supset \sim q \supset \sim(\sim p) \quad (١٢)$$

من رقم (٦) ، (١١) والقضية رقم (١١ر١) وينتج أن

$$\sim p \supset q \supset \sim q \supset \sim(\sim p) \quad (١٣)$$

نعوض من رقم (١) عن قمية p بالقيمة (~p⊃q) ، وعن قيمه q بالقيمة [~q ⊃ ~(~p)] ، وعن قيمة r بالقيمة (~q ⊃ p) ينتج أن

$$[\{\sim q \supset \sim(\sim p)\} \supset \{\sim q \supset p\}] \supset [\{(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim(\sim p)\} \supset \{(\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)\}] \quad (١٤)$$

من (١٠) ، (١٤) ، القضية رقم (١١ر١) ينتج أن

$$(\sim p \supset q) \supset [q \supset \sim(\sim p)] \supset (\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p) \quad (١٥)$$

من (١٣) ، (١٥) ، القضية رقم (١١ر١) ينتج أن

$$\sim p \supset q \supset \sim q \supset p$$

هـ . ط . ث

تلك هى بعض صور البراهين الرياضيـة والتى تعـد بمثابة الأساس الأول فى «مبادىء الرياضيات» . لكن هل اكتفى رسل وهوايتهد بهذه الصور الأساسيه للقضايا الإبتدائية ؟ أم أنه قد اشتقت منهـا صوراً أخرى وقضايا فرعية ؟

الحقيقة أنه اذا كان كتاب المبادى قـد أوضح لنـا الأسس الأوليـة للنسق الإستنباطي فى صورته الإساسية ، فإنه ينبغى علينا أن نؤكد أن الصلة بين المنطق

والرياضيات لعبت دوراً كبيراً فى تطوره أسس وأبعـــاد المذهب اللوجستيقى ، فالرياضيات كانت موضع اعتبار أصحاب المبادىء ، والنظريات الرياضيه سواء فى الجبر أو الهندسة أو أى فرع من فروع الرياضيات البحتة Pure Mathematics تشتق منها نتائج أو لواحق ، لما ما للنظرية من قوة وفاعليه ، وتسمى نتائج أو لواحق لأنها تترتب عليها أو بمعنى أدق لأنها تندرج تحت ما هو أهم منها . لهذا فقد حاول رسل وهوايتهد أن يستنبطا الصور الاشتقاقية للقضايا الاخرى والتى تعد جزءاً أساسيا من الجهاز الاستنباطى لمبادىء الرياضيات ، وقد اعتبرت المفاهيم الأساسية المطروحة فى الجزء الاول من المبادىء بمثابة قواعد لا غنى عنها فى متابعة النسق الاستنباطى للرياضيات فى الجزأين الثانى والثالث ، وهذا ما حذا برسل أن يقرر فى «مقدمة الفلسفه الرياضية» أنه لا يمكن لنا أن نتبين فى مبادىء الرياضيات أين يبدأ المنطق وأين تنتهى الرياضيات . لقد أصبح لهـــذه الصيحه ما يبررها لأنه لم يعد بمقدور المناطقة والرياضيين معا أن يفصلوا أى من النسقين عن الآخر ، بعد أن امتزج النسق الرياضى بالنسق المنطقى امتزاجا تاما ، وبعد أن خلعت الرياضيات ثوبها على المنطق ، فى الوقت الذى تقلدت فيه رداء المنطق . فكأن مذهب جبر المنطق لبول ، ونزعة منطقة الرياضيات لبيانو وفريجة ، قد إنصهرا معـا فى بوتقة المذهب اللوجستيقى .

والقضايا الاشتقاقية فى حساب اللوجستيقا تتخـــذ صوراً متعدده ويمكن تصنيفها فى المجموعات الآتية : ـ

المجموعة الأولى : مجموعة قوانين الفكر الأساسية The laws of Thoughts

وهذه المجموعة تشتمل على القوانين الثلاثة الأساسيه أضيف إليها قانونا رابعـــا هو قانون النفي المزدوج . وهذه القوانين هي : ـ

١ — قانون الذاتيه Law of Identity

2 . 08 $p \supset p$

٢ — قانون عدم التناقض Law of Contradiction

3 . 24 $\sim (p \cdot \sim p)$

٣ — قانون الثالث المرفوع law of Excluded Middle

2 . 11 $p \vee \sim p$

٤ — قانون النفي المزدوج law of Double Negation

4 . 13 $p \equiv \sim (\sim p)$

وقد سبقت لنا البرهنة على هذه القوانين فيما عدا قانون عدم التناقض ويمكن البرهنة عليه على النحو التالى :

فى القضية رقم (٢،١١) والتى تقرر ان

$$p \vee \sim p$$

نضع p ~ بدلا من p فنحصل على

$$\sim p \vee \sim (\sim p) \qquad (١)$$

وفى القضية رقم (٣،١٤) حيث

$$\sim p \vee \sim q \supset \sim (p \cdot q)$$

نضع p ~ بدلا من q فنحصل على

$$\sim p \vee \sim (\sim p) \supset \sim (p \cdot \sim q) \qquad (٢)$$

من (١) ، (٢) وباستخدام قاعدة اثبات التالى نحصل على

$$\sim (p \cdot \sim p)$$ هـ . ط ث

المجموعة الثانية : وتشمل مجموعة القوانين المختلفة لصور التكافؤ . وتقع هذه المجموعة في أربعة صور أساسية .

(١) قانون النقل The law of Transposition

وله ثلاثة صور هي

4.1 $p \supset q \equiv \sim q \supset \sim p$

4.11 $p \equiv q \equiv \sim p \equiv \sim q$

4.14 $[(p \cdot q) \supset r] \equiv [(p \cdot \sim r) \supset \sim q]$

(٢) قانون تحصيل الحاصل The law of Tautology

وله صورتان

4.24 $p \equiv p \cdot p$

4.25 $p \equiv p \vee p$

وهذا القانون من وجهة النظر الصورية البحتة وما يترتب عليه من نتائج يميز جبر المنطق عن الجبر العادي ordinary algebra

(٣) قانون الامتصاص The law of absorption

4.71 $(p \supset q) \equiv [p \equiv (p \cdot q)]$

ويفيدنا هذا القانون في تحويل صور التضمن إلى صور التكافؤ equivalence

(٤) قانون التوزيع The distributive law

وله صورتان

$$4.4 \quad [p \cdot (p \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$$

$$4.41 \quad [p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$$

المجموعة الثالثة **مبادىء خاصة بقواعد القياس** Syllogism

وتنحصر هذه المجموعة فى صورتين

(١) **مبدأ القياس** Principle of the Syllogism

وله صورتان

١ — الصورة الأولى

$$2.06 \quad (q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

ويمكن البرهنة على هذه الصورة على النحو التالى

لنضع $\sim p$ بدلا من p فنحصل على

$$(q \supset r) \supset [(\sim p \supset q) \supset (\sim p \supset r)] \quad (١)$$

∵ تعريف التضمن فى القضية رقم (١,٠١) ينص على أن

$$p \supset q = \sim p \vee q$$

∴ يمكن إستبدال الصيغة $(\sim p \supset q)$ بالصيغة $(\sim \sim p \vee q)$،

وكذلك تستبدل الصيغة $(\sim p \supset r)$ بالصيغة $(\sim \sim p \vee r)$

فتصبح صدرة المعادلة رقم (١) هى

$$(q \supset r) \supset [(\sim \sim p \vee q) \supset (\sim \sim p \vee r)] \quad (٢)$$

من رقم (٢)، والقضية (١,١١) وتعريف التضمن فى (١,٠١) نحصل على

$$(q \supset r) \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$$

هـ . ط . ث

الصورة الثانية

2. 06

$$(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$$

(٢) برهان الخلف Reductio ad absurdum

2. 01 $[p \supset (\sim p)] \supset \sim p$

المجموعة الرابعة لواحق القياس

وتندرج في خمس صور من المبادىء الأساسية : ـ

(١) مبدأ التصدير Principle of exportation

ويرجع هذا المبدأ إلى بيانو

3. 3 $[(p \cdot q) \supset r] \supset [p \supset (q \supset r)]$

(٢) مبدأ الاستيراد Principle of Importation

ويرجع إلى بيانو أيضا

3. 31 $[p \supset (p \supset r)] \supset [(p \cdot q) \supset r]$

(٣) مبدأ التقرير Principle of assertion

3 - 85 $p \cdot (p \supset q) \supset q$

(٤) مبدأ التركيب Principle of Composition

ويرجع إلى بيانو

3. 43 $[(p \supset q) . (p \supset r)] \supset [p \supset (p . r)]$

(٥) مبـــدأ العامل Prinicple of Factor

ويرجع إلى بيانو

3. 47 $(p \supset r) . (q \supset S)] \supset [(p . q) \supset (r . S)]$

المجموعة الخامسة مبادىء متصلة بالقياس ولواحقه وتنحصر فى مبدأين :-

(١) مبـــدأ التبسيط Principle of Simplification

2. 02 $q \supset (p \supset q)$

(٢) مبدأ الاتصال Commutative Principle

2 . 04 $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$

هذا إلى جانب مجموعة القوانين الأساسية الخاصة بالضرب المنطقى Logical Product ، تعريف الضرب المنطقى وهى

. 2 $p \supset [q \supset (p . q)]$

. 26 $(p . q) \supset p$

3 . 27 $(p . q) \supset q$

3 . 01 $(p . q) = \sim (\sim p \vee \sim q)$ Df

الفصل الثاني

نظرية حساب المحمول

الفصل الثانى

نظرية حساب المحمول

Theory of Predicate Calculus

أحدث كتاب « مبادىء الرياضيات » تطوراً هائلا فى الأبحـــاث الرياضية والمنطقية على السواء . ذلك أن هـذا المؤلف الضخم ، كان بمثابة حجر الزاوية فى تحديد المصطلحات والمفاهيم المنطقية والرياضية التى درج المناطقة والرياضيين على تناولها فى أبحاثهم بلا تمحيص أو تدقيق ، ومن ثم فقد لعب دوراً هاما فى تطور المنطق الرياضى[1] ، وقد إستطاع رسل وهوايتهد فى هذا المؤلف أن يقدما لنا الرياضيات كفرع من المنطق[2] .

والحقيقة التى لا يجب أن نسقطها من حسباننا ، ونحن بصدد تناول كتاب المبادىء ، تتمثل فى أن هذا الكتاب يعد بحق بداية عهد جديد للأبحاث المنطقية، لأنه أحدث ثورة ضخمة فى مجال المنطق ، لا تقل بحال من الأحوال عن تلك الثورة التى أحدثها « نقد العقل الخالص » لكانط فى مجال الابستمولوجيا ومباحثها.

ونظرية حساب المحمول من النظريات الحديثة التى بدأت مع بداية مبادىء الرياضيات ، فمنذ أن تبين رسل أن القضية العامة هى فى جوهرها قضية شرطية متصلة ، إتجه إلى صياغة أفكاره المنطقية صياغة جديدة .

---

(1) Ayer, A. J., An Apprisal of Bertrand Russell's Philosophy, p. 171, ed in "Schoenman Volum" 1967.

(2) Bloch, W., Russell's Concept of Philosophy, p. 153-154, ed. in "schoenman valum"

وتختلف نظرية حساب المحمول عن نظرية حساب القضايا إختلافا جوهريا ، فنحن فى حساب القضايا نتناول القضية كلها كوحدة واحدة ، ونضع لها رمزاً واحداً ، ثم نقوم بعملية حساب قيم الصدق أو الكذب فى ضوء علاقة القضية بقضية أخرى مرتطبة معها بأحد ثوابت الوصل أو الفصل أو التضمن أو التكافؤ. على حين أن حساب المحمول يتناول حدود Terms القضية كل على حده ، ويضع رموزا للموضوعات وأخرى للمحمولات ، كما ويرمز للسور الكلى Universal quantifier والسور الجزئى Existential quantifier فى القضية ، وهذا مالا نجده فى نظرية حساب القضايا .

وعلى هذا الأساس فإن حساب المحمول ينفذ إلى بناء القضية ككل ، وبالتالى تعتبر نظرية حساب المحمول فى حد ذاتها أعم من نظرية حساب القضايا ، لأنها تتناول القضية كلها فى لغة رمزية متكاملة ، فضلا عن أن النظرية ذاتها يمكن التعبير عنها بنفس القوانين المستخدمة فى نظرية حساب القضايا .

ومما لاشك فيه أن رسل قــد عرض بعض أفكاره الخاصة بهذه النظرية فى المقاله التى نشرها عام (١٩٠٨) تحت عنوان[١] « المنطق الرياضى مستندا إلى نظرية الانماط » ، إلا أنه طور النظرية ، فيما بعد ، تطويرا دقيقا فى « مبادىء الرياضيات »[٢] ، فى القسم الثانى من الجزء الأول تحت اسم « نظرية المتغيرات الظاهرية » Theory of Appearent variables ، وعلى هــذا الأساس فإننا سنحاول أن نقدم شرحا لأبعاد نظرية حساب المحمول كما تطورت من خلال أفكار رسل .

---

(1) Russell, B., Logic and Knowledge, pp. 59-102, (Marsh. vol).

(2) Principia, pp. 127-160.

توجد لدينا في نظرية حساب المحمول خمسة أنواع من الرموز المستخدمة يمكن عرضها على النحو التالي :

١ — رموز المتغيرات الفردية Individual variables مثل X ، Y ، Z

٢ — رموز المتغيرات الحملية Predicative variables مثل F ، G ، .. الخ

٣ — رمز السور الكلي Universal quantifier بالرمز (x) الذى يشير إلى كلمة (كل).

٤ — رمز السور الجزئي Existential quantifier بالرمز (∃x) وهو يشير إلى كلمة (بعض) .

٥ — رموز الثوابت المنطقية Logical Constants وهي ذاتها الرموز المستخدمة في حساب القضايا (⊃ ، . ، ∨ ، ~ ، ....).

والرمز الذى يرمز به السور الجزئي للقضية ، إنما هو في الواقع يرمز إلى الفرد ، أو الشيء الجزئي الذى ننسب إليه خاصة ما ، على حين أن الرمز الذى نرمز به السور الكلي ، إنما يرمز مباشرة إلى الأشياء المقصودة في القضية . ويلاحظ أنه حينما نقوم بكتابة القضية في صيغة رمزية ، فإننا نقدم المحمول في الصياغة ونأتي بالموضوع بعده . فإذا أردنا أن نعبر عن القضية « سقراط حكيم » في صيغة رمزية بلغة حساب المحمول ، قلنا (fx) حيث f تشير إلى المحمول ، x تشير إلى الموضوع .

وعلى هذا الأساس فإنه يمكن لنا أن نبحث صور القضايا الأربعة التقليدية ، الكلية الموجبة ، الكلية السالبة ، الجزئية الموجبة ، والجزئية السالبة ، في ضوء الأفكار التي عرضنا لها .

أولا : القضية الكلية الموجبة :

انتهى أرسطو ، وهو بصدد تصنيفه النهائى للقضايا الحملية ، إلى اعتبار أن الصور الأربعة للقضايا الحملية تعتبر بمثابة أبسط صور القضايا ، والتى لا يمكن أن تنحل إلى ماهو أبسط منها ، على حين أنه اتضح ، فيما بعـد ، لأصحاب المنطق الرمزى ، أن تلك الصـور ليست فى حقيقتها صوراً بسيطة ، لأنه قد تبين أن القضية العامة أو الكلية إنما هى فى حقيقة أمرها قضية شرطية متصلة ، تعبر عن علاقة بين دالتى قضيتين ، تصبح كل من الدالتين قضية حملية حـين تتعين قيمة المتغير[1] . ومن ثم لم تصبح القضية العامة حملية بالمعنى الدقيق ، وإنما هى شرطية متصلة ، على حين أن الحملية هى الشخصية Singular . فموضوع القضية العامة إذن ليس اسم علم ، على حين أن موضوع القضية الشخصية اسم علم ، حيث تقوم فى القضية الشخصية بإسناد محمول إلى اسم علم ، أو شىء جزئى له وجود فى الواقع ، وهذا ما جعل رسل يقرر أن « القضايا ذات الصورة (كل ا هى ب) ليست حملية بالمعنى الدقيق ، لكنها تعبر عن علاقة بين محمولات »[2] .

فاذا قلنا « كل إنسان مفكر » ، فان كلمة (انسان) فى هـذه القضية هى محمول أيضا شأنها فى ذلك شأن (مفكر) تماما ، لأنه يمكن أن نترجم هذه القضية على النحو التالى « إذا كان x انسان ، فان x مفكر » . نفسر هذا القول بأنه إذا ما حملنا صفة الإنسانية على (x) وليكن محمدا ، مثلا ، فانه لابد وأن نحمل عليه أيضا صفة كونه مفكرا .

(1) Russell, B., My Philosophical Development, p, 66.

(2) Russell, B., On the Relations of Universals to Particulars, p. 123, ed. in " Marsh, vol".

وعلى هذا الأساس فان القضية «كل انسان مفكر» والتى اعتبرها التقليديون ، قضية حملية ، انما هى فى جوهرها قضية شرطية متصلة ، يمكن التعبير عنها فى صورة التضمن ، ومن ثم فانه يمكن تفسير القضية السابقة من وجهة نظر حساب المحمول على النحو التالى :

$$(x)\ [\ f\ x \supset g\ x\ ]$$

أى أنه فى كل قيم (x) إذا كانت (x) تتصف بالخاصية (f) فان ذلك يتضمن أن (x) لابد وأن تتصف بالخاصية (g) .

فى الصيغة الرمزية السابقة ترمز (x) إلى سور القضية (كل) ، وفى (f x) فإن (x) ترمز إلى اسم العلم ، وترمز (f) إلى المحمول إنسان ، وترمز (g) إلى المحمول مفكر .

ثانيا : القضية الكلية السالبة

إن ما ينطبق على القضية الكلية الموجبة ، ينطبق بالضرورة على الكلية السالبة ، الا أن صياغة هذه القضية تختلف عن الكلية الموجبة فى ناحية السلب فقط ، فاذا قلنا « لا إنسان مفكر » ، فإن هذه القضية يمكن وضعها فى الصيغة الرمزية التاليه

$$(x)\ [\ f\ x \supset \sim g\ x]$$

وتفسير هذه الصيغه أنه « فى كل قيم (x) إذا كانت (x) تتصف بالخاصية (f) فان ذلك يتضمن أن (x) غير متصف بالخاصية (g) » .

ثالثا : القضية الجزئيه الموجبه :

القضية الجزئيه ، كما اعتبرها المنطق الرمزى ، انما هى قضية مركبة من قضيتين حمليتين ، مرتبطتين معا بواو العطف ، أى ثابت الوصل . فالقضية « بعض الطلاب ناجحون » يمكن أن نضعها فى الصيغة الرمزية الآتية :

$$(\exists x) \; Ex \, . \, gx]$$

ونفسر هذه الصيغة كما يلى : « يوجد فرد واحد على الأقل (x) عما يكون متصفا بالخاصية (f) والخاصية (g) معا » .

رابعا : القضية الجزئية السالبة

تختلف صورة القضية الجزئية السالبة عن الجزئية الموجبة فى ناحية السلب ، ذلك أن هذه القضية فى حد ذاتها تخضع لحكم السلب . فالقضية « بعض العرب ليسوا أحرار » يمكن أن نضعها فى الصياغة الرمزية الآتية :

$$(\exists x) [fx \, . \sim gx]$$

وهذه الصيغة نفسرها كما يلى : « يوجد فــرد واحد على الأقل (x) مما يكون متصفا بالخاصية (f) ولا يكون متصفا بالخاصية (g) » .

والصورة الرمزية السابقة تساوى الصورة الآتية : ـ

$$\sim (x) [Fx \supset gx]$$

لأنه اذا قلنا أن « بعض العرب ليسوا أحرار » فان هذه الصيغة تساوى قولنا « من الكذب أن نقول عن كل عربى أنه حر » .

يتضح لنا مما سبق أن حساب المحمول يعتمد أساساً على فكرتى « صادق دائما » always true « وصادق أحيانا » Sometimes true ، كما وأن الطريقة البرهانية المتبعة فى نظرية حساب المحمول هى ذاتها المتبعة فى نظرية حساب القضايا .

لكنة اذا ما نظرنا إلى نظرية القياس الأرسطية ، لوجدنا أن القياس بصفة عامة، صورة إستدلالية موصلة لليقين المطلق، ومن ثم فقدأعتبر عملية عقلية خالصة تصبح فيه الصحة الصورية مطلبا أساسيا .

والقياس، كما نعلم يستند إلى قوانين الفكر الأساسية، التى تفترض مقدما ثبات الموجودات وخضوعها لنظام عقلى يتجاوب مع النظام العقلى الذى يفترضه المنطق.

ورغم أن أرسطو كان أول من وضع نظرية القياس فى قالبها وصورتها النهائية، إلا أنه بطبيعة الحال لم يكن أول من إستدل قياسيا [1]، فالناس يستخدمون الأسلوب القياسى فى حياتهم العملية دون إدراك منهم لحقيقته تماما، لكن عبقرية أرسطو فى هذا الجانب من جوانب فكره ترجع إلى كونه، قد استخلص القوانين والقواعد والشروط التركيبية اللازمة لصحة القياس؛ وقد تكون الإرهاصات الأولى للمنطق الصورى، بصفة عامة، قد صدرت عن مدارس الجدل السفسطائى ومن ثنايا المحاورات الأفلاطونيه.

وإذا ما حاولنا تتبع نظرية القياس الأرسطية فى الفكر الأرسطى ذاته، لوجدنا أن أرسطو قد أودع نظريته فى القياس، الفصول الأربعة الأولى من التحليلات الأولى، وليس هناك شك فى أن نظرية القياس الأرسطية قد ظلت موضع الاعتبار والدراسة والبحث من جانب المفكرين على إختلاف نزعاتهم ومدارسهم ومذاهبهم. ولم يكتب لمحاولات الخروج على قالب الفكر الارسطى النجاح الا مع بداية العقود الأولى من القرن العشرين، حيث صدرت مباحث الرمزية Symbolism تحت تأثير الدواعى الرياضية، ومحاولة العثور على الأسس المنطقية للرياضيات.

والقياس نوع من الاستدلال غير المباشر، وهو بحسب أرسطو، «قول متى

---

(١) د. محمد على ابوريان، د. على عبد المعطى، أسس المنطق الصورى، ص ٢٢٩، الطبعة الأولى ١٩٧٤.

وضعت فيه أشياء معينة تنتج عنها بالضرورة شيء آخر » (١) .

إلا أن تعريف القياس الأرسطى ، على هذا النحو ، قد أثار بعض الجدل فى دوائر الفكر المنطقى،لأنه قد ينطبق على غيره من صور الاستدلال الغير قياسى(٢). والحقيقة التى تفصح عن ذاتها ، أن أرسطو قد وضع تعريف القياس أولا ، ثم أخذ بعد ذلك يشرع فى تحديد شروطه . وجوانب صحته ، وفى هـذا ما يشجب التعريف ذاته ، ذلك لأن أرسطو ، ومن قبله سقراط وأفلاطون، كانوا يطالبون بالتعريف الجامع المانع . وتعريف أرسطو بصورته الأولية ، وإن اعتبر جامعا، إلا انه لا يعتبر مانعا لغير صور الاستدلال القياسى من الدخول تحت القياس.

والقياس إما أن يتألف من نوع واحد من القضايا ، وهذا القسم يشتمل على القياس الحملى والشرطى بنوعية المتصل والمنفصل . وإما أن يتألف من أكثر من نوع واحد من القضايا ، وهذا القسم يشمل القياس الاستثنائى بأنواعة المختلفة .

والقياس الحملى يتألف من ثلاثة قضايا حملية تشتمل على ثلاثة حدود ، أو من مقدمتين ونتيجه ، والحـــدود الثلاثة هى الأكبر Mojor والأوسط Middle والأصغر Minor ، ولا يظهر الحد الأوسط فى النتيجه .

ومن اعتبار وضع الحد الأوسط، وضع أرسطو ثلاثة أشكال قياسية، أضاف إليها « جاليئوس » فيما تلاه من العصور شكلا رابعا .

والشكل الأول من أشكال القياس،هو الشكل الوحيد الذى نجد فيه الموضوع الذى، تحتويه النتيجه ، موضوعا فى المقدمة الصغرى ، ويكون محمولها ، محمولا فى

---

(1) Priori Analytics, 24b, 20 .

(2) Bradley., Principles of logic, Book II, ch 4. 108 .

المقدمة الكبرى. ولقد عول أرسطو تماما على هذا الشكل، من حيث أنه ينتج القضايا بجميع أنواعها، كما وانه ينتج لنا الكلية الموجبة، التى تعتمد عليها العلوم الاستنباطية Deductive sciences، فيما يرى كينز (١). ولهذا السبب اعتبره أرسطو أكمل الأشكال، وإليه ترد كل من ضروب الشكلين الثانى والثالث.

أما الشكل الثانى، فانه ينتج لنا القضايا السالبة فقط، ومن ثم يكثير استخدامه فى الجدل، وفى هذا الشكل نجد محمول النتيجة هو فى الأصل موضوع المقدمة الكبرى.

أما الشكل الثالث فنجد فيه موضوع النتيجة هو فى الأصل محمول المقدمة الصغرى، وهذا الشكل لا ينتج لنا الا القضايا الجزئية، تلك التى تستخدم لأغراض إبطال البرهان (٢).

والشكل الرابع من أشكال القياس — والذى وضعه جالينوس — ينتج لنا جميع القضايا فيما عدا الكلية الموجبة التى يختص بإنتاجها الشكل الاول، وقد رفض بعض المناطقة إعتبار هذا الشكل (٣).

والسؤال الآن: هل يمكن لنا معرفة إنتاج الضروب، من عدمه، فى الأشكال القياسية الأربعة، فى ضوء إعتبار القضية الكلية، شرطية متصلة، كما اتضح لأصحاب المنطق الرمزى ؟

يمكن لنا أن نتقدم خطوه الى الأمام لنفحص الضروب فى الأشكال القياسية الأربعة لتتضح أمامنا معالم الطريق نحو معرفة المنتج من الضروب، والفاسد منها.

---

(1) Keynes., Formal logic, p. 315

(2) Ib.d, p. 310

(3) Ibid, p. 316

أولا : الشكل الاول

لهذا الشكل من أشكال القياس موضعه الهام لدى أرسطو فى نظرية القياس بوجه عام ، ذلك لأنه الشكل الوحيد الذى ينتج لنا القضية الكلية الموجبة ، كما ترد إليه الأشكال الأخرى ، والصورة الرمزية العامة لهذا الشكل تأخذ الصيغة التالية :

أ هى ب　　／　　وضع الحد الاوسط

جـ هى أ

∴　　جـ هى ب

والضروب المنتجة فى الشكل الأول من أشكال القياس أربعة وهى .

Barbara — Celarent — Darii — Ferio

١ — الضرب الأول — الشكل الأول　Barbara

يمكن لنا توضيح صورة هذا الضرب القياسى بالمثال التالى

كل ا هى ب

كل جـ هى ا

∴ كل جـ هى ب

هذا الضرب يمكن صياغته من وجهة نظر نظرية حساب المحمول على النحو التالى :

$$(x)[fx \supset gx]$$
$$(x)[hx \supset fx]$$
$$\supset$$
$$(x)[hx \supset gx]$$

ويمكن لنا وضع هذا القياس في معادلة واحدة على النحو التالي :

$$[(x)(fx \supset gx) \quad (x)(hx \supset fx)] \supset (x)(hx \supset gx)$$

يمكننا تفسير الصيغة السابقة على النحو التالي :

« في كل قيم x اذا كانت x تتصف بالخاصية f فإن هذا يتضمن أيضا أن x تتصف بالخاصية g ، وكذلك فإنه في كل قيم x إذا كانت x تتصف بالخاصية h فان هذا يتضمن أيضا أن x تتصف بالخاصية f وهذا يتضمن أنه في كل قيم x اذا كانت x تتصف بالخاصية h فان ذلك يتضمن أنها تتصف بالخاصية g »

وفي ضوء هذا التفسير الرمزي يمكن لنا صياغة المثال الذي أشرنا إليه كما يلي:

« أن كل شيء نقول عنه أنه ا فان هذا القول ، يتضمن أن هذا الشيء ب ، كما وأن كل شيء نقول عنه أنه حـ فان هذا يتضمن كونه ا . وهذا يتضمن بالضرورة أن كل شيء متصف بصفة كونه حـ ، فإن هذا يتضمن أيضا أنه ب ».

نجد من هذه الصياغة ، أن التفسير مطول بدرجة لا تمكننا من إعادة تكرارها في صياغة كل ضرب من ضروب القياس . ومع هذا فانه يمكننا معرفة ما إذا كان هذا الضرب القياسي منتج أم فاسد إذا ما وضعنا الصيغة الرمزية السابقة في قائمة صدق ، فاذا ظهرت قيمة كذب واحدة تحت ثابت التضمن الرئيسي (١) ، فان

---

(١) وثابت التضمن الرئيسي هو ما توضحه لنا قيم الصدق و الكذب تحت العمود رقم (٨) في كل قوائم ضروب الأشكال الأربعة ويشار هنا للصدق بالرمز T وللكذب بالرمز F

الضرب القياسى يكون فاسدا .

والصيغة الرمزية للضرب Barbara يمكن وضعها فى صياغة أخرى من وجهة نظر نظرية حساب القضايا فتأخذ الصورة التالية .

$$[(p \supset q) . (R \supset p)] \supset (R \supset q)$$

يلاحظ هنا أن هذه الصيغة تحتوى على ثلاثة متغيرات

p , q , R

ومن ثم فان لها ثمانى قيم للصدق أو الكذب .

قائمة الصدق

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
[(p	⊃	q)	.	(R	⊃	p)]	⊃	(R	⊃	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

يتضح لنا من قائمة الصدق السابقة أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسى فى العمود رقم (٨) كلها قيم صدق ، ومن ثم فإن هذا الضرب صحيح أى انه يؤ...

٢ — الضرب الثانى من الشكل الأول Celarent

مثال هذا الضرب

لا ا هى ب	E
كل حـ هى ا	A
لا حـ هى ب	E

هذا الضرب يضع له حساب المحمول الصياغة التالية

$$[(x)(fx \supset \sim gx).(x)(hx \supset fx)] \supset (x)(hx \supset \sim gx)$$

وهذه الصياغة من وجهة نظر نظرية حساب القضايا تصبح

$$[(p \supset \sim q).(R \supset P)] \supset (R \supset \sim q)$$

يمكن لنا وضع قائمة صدق هذه الصيغة على النحو التالى لنعرف إنتاج هذا الضرب من عدمه .

قائمة الصدق

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
[(P	⊃	∼ q	.	(R	⊃	P)]	⊃	(R	⊃	∼q)]
	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
	F	F	F	F		T	T	F	T	F
T	T	T	T	T	T	T	[illegible]	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T		F	T	T
F	F	F	F	T	F		T	T	F	F
F	T	F	T	[illegible]	T	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F		F	T	T

يتضح لنا من هذه القائمة أن هذا الضرب صحيح ومنتج

٣ — الضرب الثالث من الشكل الأول Darii

مثال هذا الضرب

كل أ هى ب	A
بعض حـ هى أ	I
∴ بعض حـ هى ب	I

نعبر عن هذا الضرب رمزيا وفقا لنظرية حساب المحمول كما يلى

$$[(x) (fx \supset gx) . (\exists x) (hx . fx)] \supset (\exists x) (hx \cdot gx)$$

تختلف هذه الصيغة عن صيغة الضروب الكلية فى أن سور القضية جزئى ويرمز له بالرمز $(\exists x)$ أى « فى بعض قيم x » .

نضع هذه الصيغة فى صورة حساب القضايا على النحو التالى

$$[(p \supset q) . (R . p] \supset (R . q)$$

قائمـــة الصدق

[(p	⊃	q)	.	(R	.	p)	⊃	(R	.	q)
T	T		T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

نجد هنا أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هى قيم صدق و من ثم فان الضرب الثالث من الشكل الأول منتج .

٤ — الضرب الرابع من الشكل الأول Ferio

لا ا هى ب E

بعض حـ هى ا I

∴ ليس بعض حـ هى ب O

يمكن لنا صياغة هذا الضرب على النحو التالى :

$$[(x)(fx \supset \sim gx) \cdot (\exists x)(hx \cdot fx)] \supset (\exists x)(hx \cdot \sim gx)$$

وتصبح هذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا كما يلى :

$$[(p \supset \sim q) \cdot (R \cdot p)] \supset (R \cdot \sim q)$$

قائمة الصدق

[(p	⊃	~)	.	(R	.	p)	⊃	(R	.	~)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T

يتضح لنا من قائمة الصدق السابقة أن الضرب الرابع Ferio من الشكل الأول صحيح ومنتج ذلك أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسى أنما هى قيم صدق.

ومن ثم فإنه قد إتضح لنا أن الضروب الأربعة التى أعتبرها أرسطو ضروبا منتجة فى الشكل الأول . انما هى كذلك من وجهة نظر حساب المحمول بعد أن أجرينا عليها عمليات التحليل فى قوائم الصدق وفقا للشروط التى تحددها الثوابت المنطقيـــة .

ثانيا : الشكل الثانى Second figure

الصورة الرمزية العامة لهذا الشكل

ا هى ب حـ هى ب ∴ حـ هى ا	وضع الحد الأوسط

ذهب أرسطو إلى أن الضروب المنتجة فى هذا الشكل أنما هى أربعة ضروب وهى على الترتيب .

Cesare - Camestres - Festino - Baroco

ويمكن لنا أن تتبين إنتاج هذه الضروب من فسادها إذا ما أجرينا عليها عملية التحليل فى قوائم الصدق .

١ — الضرب الأول من الشكل الثـانى Cesare

لا ا هى ب	E
كل حـ هى ب	A
لا حـ هى ا	E

صيغة هذا الضرب تأخذ الصورة التالية من وجهة نظر حساب المحمول .

$$[(x)(fx \supset \sim gx) \cdot (x)(hx \supset gx)] \supset (x)(hx \supset \sim fx)$$

ومن وجهة نظر حساب القضايا تصبح .

$$[(p \supset \sim q) . (R \supset q)] \supset (R \supset \sim q)$$

وقائمة صدق هذا الضرب تأخذ القيم التالية :

[(P	⊃	~q)	.	(R	⊃	q)]	⊃	R	⊃	~q)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	[illegible]	F	F	F	T	T	T	F	T	F
T	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T

يتضح لنا من هذه القائمة أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هى قيم صدق فيما عدا قيمة واحده هى قيمة كذب ومن ثم فان الضرب القياس فاسد.

٢ — الضرب الثانى من الشكل الثانى Camestres

ومثال هذا الضرب

كل ا هى ب	A
لا ح هى ب	E
∴ لا ح هى ا	E

صيغة هذا الضرب

$$[(x)(fx \supset gx) \cdot (x)(hx \supset \sim gx)] \supset (x)(hx \supset \sim fx)$$

وفى صيغة حساب القضايا تصبح

$$[(p \supset q) \cdot (R \supset \sim q)] \supset (R \supset \sim q)$$

وقائمة صدق هذه الصيغة تصبح على النحو التالى

[(p	⊃	q)	·	(R	⊃	∼q)]	⊃	(R	⊃	∼)
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	

توضح لنا قائمة الصدق السابقة أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسى أنما هى قيم صدق ومن ثم فان الضرب Camestres صحيح ومنتج من وجهة نظرية حساب المحول .

٣ — الضرب الثالث من الشكل الثانى Festino

لا ا هى ب E
بعض حـ هى ب I
______
ليس بعض حـ هى ا O

هذا الضرب القياسى يمكن وضعه فى الصيغة التالية

$$[(x) (fx \supset \sim gx) . (\exists x) (hx . gx)] \supset (\exists x) (hx . \sim fx)$$

وتأخذ هذه الصياغة الصورة التالية وفقا لنظرية حساب القضايا

$$[(p \supset \sim q) . (R . q)] \supset (R . \sim p)$$

وقائمة صدق هذا الضرب توضع على النحو التالى

[(p	⊃	~ q)	.	(R	.	q)]	⊃	(R	.	~ p)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T		F	F	F	F	T	T	F	F	F
T	T	T		T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F
	T	F	T	T	T	T	T	T		T
F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T		F	T		T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T

من قائمة الصدق السابقة نجد أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي في العمود رقم (٨) إنما هي قيم صدق ، ومن ثم فان الضرب Festiro صحيح ومنتج

٤ — الضرب الرابع من الشكل الثاني Baroco

صورة هذا الضرب القياسي تتضح لنا من المثال التالي

كل ا هي ب A

ليس بعض حـ هي ب O

ليس بعض حـ هي ا O

وصيغته الرمزية هي :

$$[(x)(fx \supset gx) . (\exists x)(hx . \sim gx)] \supset (\exists x)(hx . \sim fx)$$

ومن وجهة نظر حساب القضايا تكون

$$[(p \supset q) . (R . \sim q)] \supset (R . \sim P)$$

وقائمة صدق هذا الضرب توضح لنا إنتاجه من فساده .

[(p	⊃	q)	.	(R	.	~q)]	⊃	(R	.	~p)
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	T

من القائمة السابقة يتضح لنـــا أن الضرب الرابع Barocó من الشكل الثـانى منتج وصحيح لأن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هى قيم صدق .

ثالثـا : الشكل الثالث Third Figure

لا ينتج لنـا هذا الشكل سوى الجزيئات ، والصوره العامة لهذا الشكل هى

وضع الحد الأوسط

ب هى حـ
ب هى ا
∴ حـ هى ا

والضروب التى اعتبرها أرسطو منتجة فى هذا الشكل سته ضروب هى

Datisi -- Disamis — Darapti — Felapton — Bocarde — Ferison

ويمكن لنـا ـرفة انتاج هذه الضروب من فسادها عن طريق وضعها فى الصيغ الرمزية وإخضاعها للتحليل عن طريق قوائم الصدق .

٢ — الضروب الأول — من الشكل الثـالث Datisi

كل ا هى ب	A
بعض ا هى حـ	I
∴ بعض حـ هى ب	I

صيغة هذا المثال من وجهة نظر نظرية حساب المحمول

$$\left[(x)\ (f x \supset g x) \cdot (\exists x)\ (fx\ .\ hx)\right] \supset (\exists x)\ (hx\ .\ gx)$$

وهذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا تصبح

$$\left[\ (p \supset q)\ .\ (p \cdot R)\ \right] \supset (R\ .\ q)$$

وقائمة الصدق هى التى توضح لنا انتاج هذا الضرب من عدمة .

[(q	⊃	q)	.	(p	.	R)]	⊃	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F		F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

يتضح لنا من هذه الصيغة التحليلة أن جميع القيم تحت تابع التضمن الرئيس إنما هى قيم صدق ومن ثم فان الضرب القياس Datisi من الشكل الثالث منتج وصحيح .

٢ - الضرب الثانى - الشكل الثالث Disamis

ومثال هذا الضرب

بعض ا هى ب	I
كـــل ا هى حـ	A
بعض حـ هى ب	I

يمكن صياغة هذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول على النحو التالى

$$(\exists x)[fx \cdot g$$
$$(x)[fx \supset hx]$$
$$(\exists x)[hx \cdot gx]$$

$$[\ \exists x)(fx \cdot gx) \cdot (x)(fx \supset hx)] \supset (\exists x)(hx \cdot g$$

ويمكن وضع هذا الضرب القياس فى الصوره التالية من وجهة نظر حساب القضايا

$$[(p \cdot q) \cdot (p \supset R)] \supset (R \cdot q)$$

وتوضع الصيغة التحليلية لهذا الضرب فى القائمة الآتية

[(p	.	q)	.	(p	⊃	R)]	⊃	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F

يتضح لنا من الصيغة التحليلة لهذا الضرب أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسى هى قيم صدق ومن ثم فالضرب صحيح ومنتج.

٣ ــ <u>الضرب الثالث من الشكل الثالث</u> Darapti

ومثال هذا الضرب

كل الجنود شجعان	A	كل أ هى ب ك.م
كل الجنود منتصرون	A	كل أ هى حـ ك.م
∴ بعض المنتصرون شجعان	I	بعض حـ هى ب ح م

صورة هذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول هى

$$[(x)(fx \supset gx) . (x)(fx \supset hx)] \supset (\exists x)(hx . gx)$$

هذه الصورة تصبح وفقا لنظرية حساب القضايا على النحو التالى

$$[(p \supset q) . (p \supset R)] \supset (R . q)$$

الصيغة التحليلية لهذا الضرب توضحها القائمة التالية .

[(p	⊃	q)	.	(p	⊃	R)]	⊃	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F

ومن قائمة الصدق السابقة يتضح لنا أن هنـــاك ثلاث قيم كذب تحت تابعة التضمن الرئيس ومن ثم فان هذا الضرب فاسد وغير منتج ، وهذا الضرب هو الذى قاد المناطقة الرياضيين إلى القيام بمحاولة إعاده صياغة نظرية القياس الأرسطية .

٤ - الضرب الرابع - الشكل الثالث Felapton

ومثال هذا الضرب

لا	ا	هى	ب	E
كل	ا	هى	حـ	A
∴ ليس بعض	حـ	هى	ب	O

الصياغة الرمزية لهذا القياس تكون على النحو التالى

$$[\ (x)(fx \supset \sim gx)\ .\ (x)(fx \supset hx)\ ]$$
$$\supset (\exists x)(hx\ .\ \sim gx)$$

وتكون هذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا هى

$$[\ (p \supset \sim q)\ .\ (p \supset R)\ ] \supset (R\ .\ \sim q)$$

والصيغة التحليله لهذا الضرب يمكن وضعها فى القائمة التالية لنعرف ما إذا كان الضرب القياس منتجا أم فاسدا .

[(P	⊃	~q)	.	(P	⊃	R)]	⊃	(R	.	~q)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T		F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	F	F	F	T

يتضح لنا من الصيغة التحليلية للضرب الرابع من الشكل الثالث أن هناك ثلاث قيم كذب تحت ثابت التضمن الرئيس ومن ثم فان هذا الضرب فاسد وغير منتج أى أنه غير صحيح .

٥ — الضرب الخامس من الشكل الثالث Bocardo

ومثال هذا الضرب

ليس بعض ا هى ب	O
كل ا هى حـ	A
∴ ليس بعض حـ هى ب	O

يمكن وضع هذا الضرب فى الصورة التالية وفقا لنظرية حسا ت المحمول

$$[(\exists x)\, fx \,.\, \sim gx) \,.\, (x) : fx \supset hx)] \supset (\exists x)\, (hx \,.\, \sim gx)$$

وتكون هذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا على النحو التالى

$$[(p \cdot \sim q) \cdot (p \supset R)] \supset (R \,.\, \sim q)$$

والصيغة التحليلة لهذا الضرب تتخذ القيم التالية

[(p	·	∼q)	·	(p	⊃	R)]	⊃	R)	·	∼q)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	F	F	T

يلاحظ انه فى حالة الضرب Bocardo تكون كل القيم تحت ثابت المتضمن الرئيسى هى فى حد ذاتها قيم صدق ومن ثم فان هذا الضرب صحيح ومنتج .

٣ ـ الضرب السادس من الشكل الثالث Ferison

مثال هذا الضرب

لا ا هى ب		E
بعض ا هى حـ		I
∴	ليس بعض حـ هى ب	O

وهذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول يأخذ الصورة التالية

$$[\ )(fx \supset \sim gx) . (\exists x)(fx . hx)\ ] \supset (\exists x)(hx . \sim gx)$$

وصيغته من وفقا لنظرية حساب القضايا تكون صورتها

$$[(p \supset \sim q) . (P . R)] \supset (R . \sim q)$$

والصيغة التحليلية لهذا الضرب يمكن وضعها فى القائمة التالية :

[(P	⊃	~q)	.	(P	.	R)]	⊃	(R	.	~q)
[illegible]	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	[illegible]	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	[illegible]			T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T		T	T	T
F	T	T	F	F		F	T	F	F	T

يلاحظ من الصيغة التحليلية لهذا الضرب أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هى قيم صدق ومن ثم فان الضرب القياس السادس من الشكل الثالث منتج .

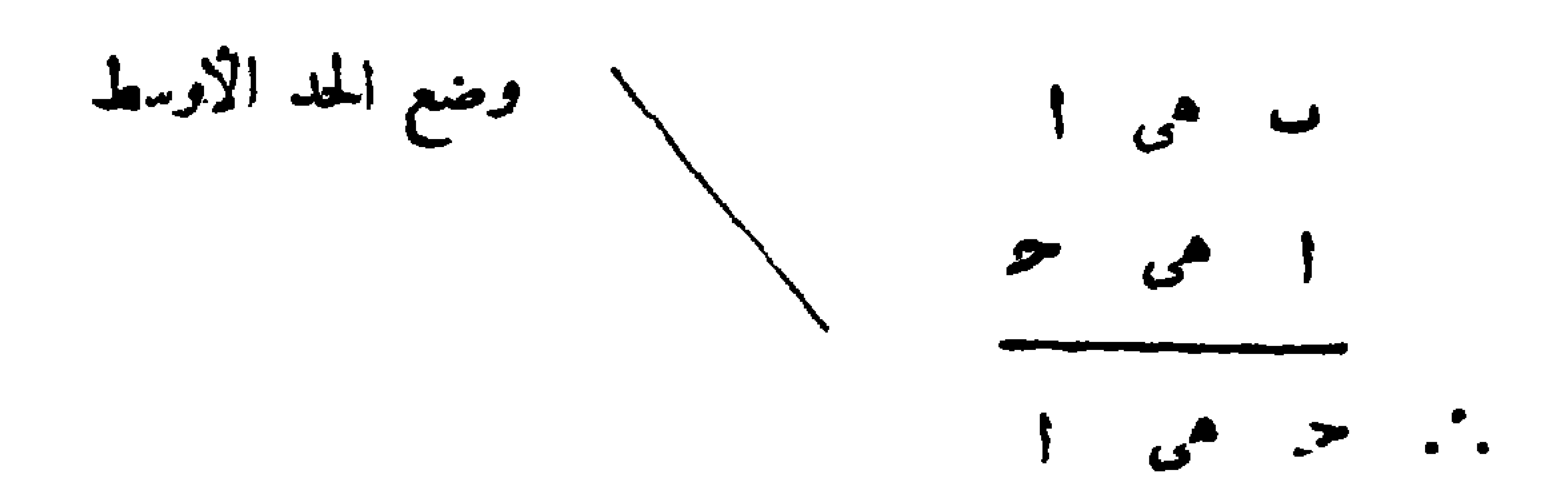
رابعا : الشكل الرابع من أشكال القياس

كان ثيوفراسطس أول من أشار إليه ثم وضعة جالينوس فى صورته المعروفة، وفيه يكون الحد الأوسط محمولا فى الكبرى وموضوعا فى الصغرى، ويفضل البعض تسمية هذا الشكل « بالشكل الجالينى » Galenian Figure . وعلى حد قول كينز Keynes فان هذا الشكل لم يظهر فى كتابات المنطق قبل بداية القرن الثامن عشر .

وقد ذهب المناطقة إلى أن هناك خمسة ضروب منتجة فى هذا الشكل ، وهذه الضروب هى :

Baralipton — Celantes — Dabitis — Fap·smo — Frisesomorum

والصورة الرمزية العامة لهذا الشكل هى



ويمكننا القيام بمحاولة صياغة الضروب الخمسة ، التى اعتبرت منتجة ، فى الشكل الرابع ؛ من وجهة نظر المناطقة المحدثين وفقا لنظرية حساب المحمول . حتى نرى ما إذا كانت هذه الضروب منتجة حقا أم لا .

١ ـ الضرب الأول من الشكل الرابع Baralipton

مثال هذا الضرب

A كل ب هى ا ك م

A كل ا هى حـ ك م

I ∴ بعض حـ هى ب جـ م

صياغة هذا الضرب القياسى وفقا لنظرية حساب المحمول هى

$$[(x)(fx \quad gx).(x)(gx \quad hx)]$$
$$\supset (\exists x)(hx.fx)$$

وهذه الصياغة من وجهة نظر حساب القضايا تصبح

$$[(p \supset q).(q \supset R)] \supset (R.p)$$

ويمكن وضع هذه الصيغة فى قائمة الصدق التالية

	⊃	___	.	(q	⊃	R)[	⊃	(R	.	p)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T		T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F

يتضح لنا من قائمة صدق هذا الضرب القياسى أن القيم تحت ثابت التضمن الرئيس فى العمود رقم ٨ تحوى ثلاث قيم كذب . ومن ثم فان هذا الضرب القياسى فاسد وغير منتج .

٢ — الضرب الثانى من الشكل الرابع Celantes

مثال هذا الضرب

لاواحد من ب هى ا	E
كل ا هى حـ	A
∴ لاواحد من حـ هى ب	E

صياغة هذا الضرب وفقا لنظرية حساب المحمول هى :

$$\left[(x)\ (fx \supset \sim gx) \cdot (x)\ (gx \supset hx) \right] \supset (x)\ (hx \supset fx)$$

وهذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا هى

$$\left[(p \supset \sim q) \cdot (q \supset R) \right] \supset (R \supset p)$$

ويمكن لنا معرفة قيم الصدق والكذب لهذه الصيغة عن طريق الالتجاء لقائمة الصدق حتى يمكننا أن نعرف صحة هذا الضرب القياسى من عدمه .

[(p	⊃	~p)	.	(q	⊃	R)]	⊃	(R	⊃	p)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T	F	T	T
T	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F

يلاحظ من الصيغة التحليلية للضرب القياسى Celantes كما هو موضح فى قائمة الصدق أن هذا الضرب فاسد وغير منتج لأن قائمة صدق هذا الضرب تحتوى على قيم كذب .

٤ — الضرب الثالث من الشكل الرابع Dabitis

ومثال هذا الضرب القياسي

كل ب هي ا	A
بعض ا هي حـ	I
∴ بعض حـ هي ا	I

صياغة هذا الضرب القياس وفقا لنظرية حساب المحمول تكون على النحو التـــالي :

$$[(x)(fx \supset gx) . (\exists x)(gx . hx)] \supset (\exists x)(hx . fx)$$

هذه الصيغة من وجهة نظر حساب القضايا تأخذ الشكل الآتي :

$$[(p \supset q) . (q . R)] \supset (R . p)$$

يمكن لنا أن نستنتج فساد هذا الضرب من صحته ، إذا ما قمنا بوضع هذه الصيغة في قائمة صدق ونجري عليها قوانين المنطق الرمزي حتى نعرف قيم الصدق الخاصة بهذا الضرب القياسي .

[(p	⊃	q)	.	(q	.	R)]	⊃	(R	.	p)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F		F	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T	F	F	T
	T	T	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	F	F	F
	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

يتضح لنا من الصيغة التحليلية لهذا الضرب أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيس هي قيم صدق Truth-values ، فيما عدا قيمة واحدة ، ومن ثم فان الضرب الثاني Datisi من الشكل الرابع فاسد وغير منتج

٢ — الضرب الرابع من الشكل الرابع Fapesmo

الصورة التالية توضح لنا صياغة هذا الضرب

كل ا هى ب A
كل ب ليست حـ E

∴ ليس بعض حـ هى ا O

صياغة هذا الضرب من وجهة نظر نظرية حساب المحمول تأخذ الصورة التالية :

$$[x(fx \supset gx).(x)(gx \supset \sim hx)] \supset (\exists x)(hx \cdot \sim fx)$$

وإذا ما وضعنا هذه الصيغة وفق نظرية حساب القضايا تكون صورتها .

$$[(p \supset q).(q \supset \sim R)] \supset (R . \sim p)$$

ويمكننا وضع هذه الصيغة للضرب الرابع من الشكل الرابع فى قائمة الصدق التالية حتى نعرف ما إذا كان هذا الضرب القياسى منتج أم لا .

[(p	⊃	q)	.	(q	⊃	~R)	⊃	(R	.	~p)
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	T	F	T		F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	F	F	T

يتضح لنا من هذه القائمة أن هناك قيم كذب تحت ثابت التضمن الرئيسى فى العمود رقم (٨) ومن ثم فان هذا الضرب القياسى فاسد وغير منتج .

٥ — الضرب الخامس من الشكل الرابع Frisesomorum

مثال هذا الضرب

بعض ا هى ب	I
كل ب ليست حـ	E
∴ ليس بعض حـ هى ا	O

صيغة هـذا الضرب من وجهة نظر ، نظرية حساب المحمول تكون على النحو التالى :

$$[(\exists x)(fx \, . \, gx) \, . \, (x)(gx \supset \sim hx)] \supset (\exists x)(hx \, . \sim fx)$$

وهذه الصيغة وفقا لنظرية حساب القضايا تأخذ الصورة التالية :

$$[(p \quad q) \, . \, (q \supset \sim R)] \supset (R \, . \sim p)$$

ويمكن لنا معرفة ما إذا كان هـــذا الضرب منتجا أم فاسدا عن طريق الالتجاء لقائمة الصدق .

[(p	.	q)	.	(q	⊃	~ R)]	⊃	(R	.	~ p)
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	T	F	F	T

يتضح لنا من الصيغة التحليلية للضرب الخامس من الشكل الرابع أن هناك قيمة كذب واحده تحت ثابت التضمن الرئيس فى العمود رقم (٨) ومن ثم فان الضرب القياسى الخامس من الشكل الرابع فاسد وغير منتج .

يتضح لنا من استعراضنا للصيغ التحليلية للضروب المختلفة في الأشكال الأربعة للقياس ما يلي :

أولا : أنه ثبت بالتحليل أن الضروب الأربعة التي حدد أرسطو انتاجها في الشكل الأول انما هي ضروب صادقة ومنتجة من وجهة نظر المنطق الرياضي أيضا ، ذلك أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي في العمود رقم(٨)إنما هي قيم صدق، كما وقد اتضح أيضاصدق ضروب الشكل الثاني فيماعداالضرب الأول.

ثانيا : أن الصيغ التحليلية لضروب الشكل الثالث تكشف لنا فساد الضربين الثالث والرابع من ضروب هذا الشكل ومن ثم فهي غير منتجة من وجهة نظر المنطق الرياضي .

ثالثا : كما وقد تبين لنا فساد جميع ضروب الشكل الرابع — والتي اعتبرها التقليديون منتجة — الذي أضيف إلى أشكال القياس الثلاثة الاساسية ، التي وضعها أرسطو ، في عصر متأخر عن العصر الارسطي ، وهنا نتساءل : هل اكتشف أرسطو أن ضروب هذا الشكل إنما هي ضروب فاسده لأنها تنطوي على أغاليط تخل بشروط التضمن ؟ أم أنه لم يتوصل إلى معرفة هذا الشكل من أشكال القياس ؟

اننا بطبيعة الحال نرجح الأمر الأول ذلك لأن أرسطو قد عرف التضمن — كما أشرنا إلى ذلك من قبل — فضلا عن أنه ليس من البساطة بمكان أن نثبت عدم معرفته بالشكل الرابع أساسا ، وهو الذي وضع لنا علم المنطق وحدده تحديدا تاما من خلال القواعد والشروط الأساسية لكل تصوراته .

الفصل الثالث

نظرية حساب الفصول

الفصل الثالث

نظرية حساب الفصـــول

دراسة الفصول Classes ، من دراسات المنطق الرياضي المعاصر ذات الأهمية المركزية ، رغم أن بعض المناطقة الرياضيين لم يقدموا لنا دراسة نظرية الفصول على أنها من النظريات ذات الفائدة المباشره . زعما بأن دراسة الفصول ، فى حد ذاتها ، تخدم الفلسفه أكثر من المنطق أو الرياضيات . لكن أصحاب الإتجاه الرياضى يركزون بصفة مباشرة على أهمية هذه النظرية ، بل نجد أعمالهم تتناول المواضع الأساسية فى النظريه خاصة فى الرياضيات العليا .

وقد إتضح للمعاصرين من المناطقة والرياضيين ، أن نظرية الصفول تفضى ، بلا ريب ، إلى نتائج علميه تطبيقيه فى أهم جانب من جوانب البحث العلمى ، خاصة فى علم الفيزياء physics ، وعلى وجه التحديد فى نظرية الإحتمالات[1] Tehory of Probability

ويهمنا أن نؤكد ـ قبل أن نتناول بالبحث النظرية التى بين أيدينا ـ أن البحث فى مسألة الفصول يرتد بصفة مباشرة الى عقلية أرسطو ، صاحب المنطق وواضعة الأول. لأن نظرية الفصول ترتبط إرتباطا وثيقا ببحث التصورات Concepts من ناحية ، وبالمفهوم Intention والما صدق Extension من الناحية الأخرى ، ونظرية الأحكام Judgments من الناحية الثالثة ، وما يرتبط بهذه الأبحاث جميعا

---

(1) (a) Iass, H Gottlieb,p . probility and Statisics , ch.I, ch.2, london 1970

(b) Feller ,w., An Intoductia to Probability Theory and its Applications . 3rd ed, london, 1968

(C) KAye, D., Boolean Systems , london, 1670

من نواحى تطبيقية سواء فى الاستدلالات المبـــاشرة Mediate Infererce أو الاستدلالات غير المباشرة Immediate Inference ، هذا إلى جانب إرتباطها الوثيق بمحبث الوجود Ontology

الا أنه ينبغى أن نوضح ، بادىء ذى بدء ، اننا لن نتناول فى هـذا الموضع بحث ما لنظرية الفصول من أهميه بالنسبة لمبحث الوجود ، من الناحية الفلسفية، بل سنركز على دراسه الجوانب المنطقية والرياضية النظرية ، ذلك لأن أهمية نظرية الفصول تكمن فى ثلاث جوانب هامة هى : ـ

الجانب الأول : منطقى ، يتصل أوثق الإتصال بالاتجاهات الأساسية للمنطق الصورى الارسطى .

الجانب الثانى : رياضى ، يدعم أبحاث المناطقة والرياضيين معا فى الجزء الخاص بالمنطق الرياضى .

الجانب الثالث : تطبيقى ، يتصل إتصالا مباشرا بإمكانية استخدام العلاقات الأساسية للفصول فى نظرية حساب الاحتمالات . وهو موضوع إهتمام الرياضيين والدارسين للفيزياء الحديثة .

وعلى هذا فإننا سنتناول فى دراستنـا هذه الجانب المتصل بالمنطق الرياضى فقط لأن الجوانب الأخرى تتصل بموضوعات خارجه عن مجال هذه الدراسه .

الحقيقه التى يكاد يجمع عليهـا المناطقة الدارسون للمنطق الصورى الارسطى تتبدى لنـا من القول بأن أبحـاث أرسطو فى المنطق صدرت عن عقلية صورية تجريدية بحته ، لكن جوهر الأمر يتمثل فى أن أرسطو لم يقدم لنـا مباحث المنطق فى ثوبهـا الصورى فحسب ، بل عمد من باب حلفى الى ربط المنطق بالميتافيزيقا

فى أقوى صورها من ناحية ، كما تفصح عنها التحليلات الأرسطية فى «ما بعد الطبيعة» كما وقد ربط دراسته للمنطق بالفيزياء كعلم يدرس الواقع التجريبي من الناحية الأخرى ، وربما كشفت لنا أبحاث المعاصرين من كبار الرياضيين والفيزيائيين عن أهمية أرسطو فى هذه الناحية .

وتأسيسا على هذا ، فانه على الرغم من أننا لا نجد من بين مباحث المنطق الصورى الأرسطى مبحثا مستقلا لنظرية الفصول وأهميتها ، إلا أننا نجد أرسطو يغلف نظرية المنطق بأسرها من خلال إدراكه التام لحقيقة الدور الذى يؤديه تصور الفصل فى المنطق ، وهذا ماجعله يميز بدقة بين الحدود Terms والتصورات والمفهوم والماصدق والأحكام والقضايا .

وإذا كان المعاصرون من المناطقه لم يتبينوا أهمية أرسطو فى هذه النقطة ، فإن هذا يرجع فى المحل الأول إلى فشل أرسطو فى إدراك التمييز بين كل من القضية الحملية ، والقضية العامة من حيث اعتبر الصورة الأخير للقضية من صور القضايا الحمليه ، فضلا عن إخفاقه فى التمييز بين القضيه ودالة القضية Propositional function والتمييز بين الفعل وفصل التصور ، وتصور الفصل ، وفصول الفصول Classes of Classes ، وما إلى ذلك من التمييزات الدقيقة ، التى عرفت ولأول مرة بصورة واضحة من ثنايا أعمال رسل فى فجر هذا القرن ، وأصبحت من التمييزات الجوهرية لأصحاب المنطق الرياضى .

والآن : إذ كان رسل قد تمكن من تدعيم الإتجاه المنطقى الخاص بنظرية الفصول فى جوانبها التحليليه والتركيبية الرياضية ، فهل تمكن من دفع المنطق الرياضى خطوات إلى الامام ، أم أن نظرته لم تفى بالجانب التحليلى للنظرية ذاتها ؟

تناول رسل دراسة نظرية الفصول فى أكثر من موضع من كتاباته من أهمها:

(١) «أصول الرياضيات» (١٩٠٣) حيث نجده فى الفصل السادس من الجزء الأول يتناول دراسة الفصول وأهميتها بالنسبة للمنطق الرياضى، وذلك بعد أن عرض لنا فى الفصل الثانى كيفية إجراء الحساب التحليلى للفصول فى المنطق الرياضى وفق آراء بيانو.

(٢) «المنطق الرياضى» (١٩٠٨) وهى مقالة صدرت قبل نشر مبادئ الرياضيات، حيث يعالج فيها نظريتى الفصول والعلاقات فى القسم السابع بما يلقى الضوء على الأفكار التى وردت فى المبادئ.

(٣) «مبادئ الرياضيات» (١٩١٠-١٩١٣) - بالاشتراك مع هوايتهد - ونجده يعرض لنا النظرية العامة للفصول، وحساب الفصول، ووجود الفصول، والفصل الكلى، والفصل الصفرى، فى القسم الثالث من الجزء الأول.

(٤) «فلسفة الذرية المنطقية» (١٩١٨-١٩١٩) وهى مجموعة محاضرات ضمنها رسل أفكاره المحورية فى ثمانى محاضرات، تناول فى المحاضرة السابعة منها معالجة نظرية الفصول وهو بصدد معالجة مباحث الرمزية ونظرية الأنماط.

(٥) «مقدمة لفلسفة الرياضة» (١٩١٩) وفيه عرض لمسألة الفصول فى أكثر من موضع، إلا أنه يركز على دراسة النظرية ذاتها فى الفصل السابع عشر موضحا علاقة النظرية بأبحاث الرمزية فى المنطق بوجه عام.

يؤكد رسل [١] فى أصول الرياضيات، أن كوتيراه Couturat فى كتابة

---

(1) Russell, B., principles of Mathematics § 66

« منطق ليبنز » la logique de leibniz ينزع إلى مشايعة الاتجاه الماصدقي في المنطق الرياضي ، على أساس أن المنطق الرياضي لا يمكن تأسيسه الا على أساس وجهة النظريه الما صدقيه ، ومن ثم فإن « كوتيرا » يخالف إتجاة الفلاسفه الذين يشايعون وجه النظر المفهوميه . إلا أن رسل في تصورة لتأسيس المنطق الرياضي ، وعلى وجه التحديد في مسألة الفصول ، لا يعضد وجهه النظر المفهوميه أو الماصدقية ، بل يؤكد لنا أن المنطق الرياضي يقوم في مواضع وسطى بين المفهـــوم البحت والما صدق البحت .

وقد حاول رسل تبرير موقفه هـــذا في الأصول مبينا الصعوبات التي تكتنف تبني وجهه نظر المفهوم فقط أو الماصدق دون المفهوم . ذلك لأن الفصل يتألف من حدود ، كما ويكون معينا حين تكون لدينا الحدود التي يتألف منها ومن ثم فانه لا يمكننا إقامة تعريف للفصل بإستخدام الطريقه المفهوميه على أنه فصل من المحمولات المتعلقه بالحدود التي لدينا فقط ، أما إذا حاولنا تعريف الفصل بالطريقه المـــا صدقيه ، فاننا سنعرفه بتعداد حـــدوده (٢) وبالتالي لن نتمكن من البحث في مسأله الفصول اللا متناهيه infinite Classes

ومع هذا فنجد رسل ، وبعد مناقشة طويلة لوجهات النظر المختلفة ، يأخذ بوجهه النظر الما صدقية في مسأله البحث في نظرية الفصول ، ويؤكد أنه لابد من تفسير الفصل بالما صدق (٣) .

أما في مناقشة لتعريف الفصل في مقدمة لفلسفة الرياضة (٤) فنجده يذهب الى أن هناك طريقتان لتعريف الفصل هما :

---

(٢) تؤلف مجموعة الحدود الداخله في الفصل ما يسمى بالمجموعه aggregate أو الفئه Set ومن هذه الناحيه فان الفئه متميزه تماما عن الفصل Class .

(3) Russell, B., op . cit , 79

(4)Russll. B., Introduction to Mathematical philosophy. Ch. 2

(١) الطريقة الماصدقية ، التى نذكر بموجبها أعضاء الفصل .

(٢) الطريقة المفهومية ، التى نذكر بمقتضاها خاصة معرفه .

مؤكداً ان التعريف بالما صدق يمكن أن يرد الى التعريف بالمفهوم ، على حين أن التعريف بالمفهوم لا يرد الى التعريف بالماصدق .

الرموز الأساسية المستخدمة فى نظرية الفصول وحسابها (١)

(١) يرمز لأعضاء الفصل بالرموز X ، y ، Z

(٢) يرمز للفصول بالرموز اليونانية (٢) φ ، ψ ، X ، θ

(٣) يرمز لعضوية الفرد فى فصل بالرمز ɜ ، ويقرأ epsilon ، فاذا قلنا « $x \varepsilon \alpha$ » ، فان هذه الصيغة تعنى أن

" x is a member of the Class a "

(٤) يرمز للضرب المنطقى logical Product بالرمز ∩ ويقرأ « intersection » فاذا قلنا « a ∩ B » ، فإن هذه الصيغة تقرأ على النحو التالى

" a intersection B "

(٥) يرمز للجمع المنطقى logical Sum بالرمز U يقرأ ' union ' فالصغية ، ' a U B ' تعنى ، ' a union '

(٦) يرمز للنفى Negation بالرمز — ، فقولنا ' a -- ' يعنى ' not-a '

(٧) يرمز الى الإحتواء inclusion بالرمز ⊂ فالصيغه ، ' A ⊂ B ' تعنى ' A is included in B '

---

1 Russell .B., & whitehead, A.N., Principia Mathematica . v. 1. pp. 187-190, pp. 205-207, pp. 219-217

(٢) هذه الرموز رياضيه ؛ وتقرأ على النحو التالى phi (φ) ، (ψ) pai ،Chi (χ) ، thèta (θ)

(٨) يرمز الفصل الكلى universal Class بالرمز V

(٩) يرمز للفصل الصغرى null - Class بالرمز Λ

(١٠) يرمز لوجود الفصل بالصيغه E ! a وتقرأ ' a exists '

يعرف رسل وهوايتهد الفصل فى القضيه رقم ٢٠٫٠٣ على النحو التالى

$$\text{CLS} = \hat{a} \left\{ (\exists \phi) \cdot a = \hat{z} (\phi ! z) \right\} \text{Df}$$

وفى مبادىء الرياضيات نجد قضايا الفصول تندرج فى ثلاثه مجموعات رئيسيه هى :ـ

المجموعه الأولى :ـ وهى مجموع القضايا التى تهتم بدراسة خصائص الفصول properties of Classes وتقع هذه المجموعه من القضـايا فى ثلاثين قضيه تبدأ من القضيه رقم (٢٠٫١) وتنتهى بالقضيه رقم (٢٠٫٤٣) .

المجموعه الثانيه : وهى مجموعه القضـايا التى تهتم بدراسه الفصول والأوصـاف Descriptions معـا ، وتقع فى ثمانيه قضـايا أسـاسيه تبدأ بالقضيه رقم (٢٠٫٥) وتنتهى بالقضيه رقم (٢٠٫٥٩) .

المجموعه الثالثه : القضايا التى تعالج فصول الفصول، وهى فى خمسه عشر قضية تبدأ من القضيه رقم (٢٠٫٦) وتنتهى بالقضيه رقم (٢٠٫٨١)

وهنـاك مجموعة القضـايا الداخله فى نطـاق نظريه الفصول والتى تعد بمثـابه تعريفـات أساسيه فى كتـاب المبـادىء ، وقد أمكن لرسل وهوايتهد حصر هذه المجموعة القضـايا فى أحدى عشر قضيه هى :ـ

20.01 $F\{\hat{z}(\psi z) = (\exists \phi)[\phi ! x \equiv_x \psi x]$

$f\{\phi ! \hat{z}\}$

20.02 $x \varepsilon (\phi ! \hat{z}) = \phi ! x$

20.03 $CLS = \hat{a}\{(\exists \phi) \cdot a = \hat{z}(\phi ! z)\}$

20.04 $x \; y \varepsilon a = x \varepsilon a . y \varepsilon a$

20.05 $x, y, z \varepsilon a = x, y \varepsilon a . z \varepsilon a$

20.06 $x \sim \varepsilon a = \sim (x \varepsilon a)$

والتعريفات فى القضايا 20.04 ، 20.05 ، 20 06 تستخدم على سبيل الاختصار

20.07 $(a) \cdot f a = (\phi) \cdot f\{\hat{z}(\phi ! z)\}$

20.071 $(\exists a) \cdot f a = (\exists \phi) \cdot f\{\hat{z}(\phi ! z)\}$

20.072 $[(, a)(\phi a) \cdot f(, a)(\phi a) = (\exists y)$

$[\phi a \equiv_a a = y] f y$

20.08 $f\{\hat{a}(\psi a)\} = (\exists \phi)[\psi a \equiv_a \phi ! a]$

$f(\phi ! \hat{a})$

$$20.081 \quad a \, \varepsilon \, \psi \, ! \, \hat{a} = \psi \, ! \, a$$

وفى نطاق المجموعه الأولى من القضايا نجد رسل ودوايتهد يقرران مجموعة أساسية من القضايا الخاصة ببعض خصائص الفصول والتى تعتبر جوهرية بالنسبة للنظرية وهذه القضايا هى :-

$$20.15 \quad [\, \psi X \equiv_x X x \,] \equiv [\, \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(X z) \,]$$

يقال لفصلان انهما متطابقان فقط ، عندما تكون الدوال المعرفه لهما متكافئة صوريا .

$$20.31 \quad [\, \hat{z}(\psi z) = \hat{z}(X z) \,] \equiv$$

$$[\, x \, \varepsilon \, \hat{z}(\psi z) \equiv_x x \, \varepsilon \, \hat{z}(X z) \,]$$

يقال لفصلان انهما متطابقان فقط عندما يكون لكلاهما نفس عدد الاعضاء .

$$20.43 \quad (a = B) \equiv [\, X \varepsilon a \equiv_x X \varepsilon B \,]$$

وصياغة هذه القضيـة تعبر عن القضيـة السابقة فى صورة معادلة عن طريق استخدام الحروف اللاتينيه بدلا من :

$$\hat{z}(X z) \text{ ، } \hat{z}(\psi Z)$$

$$20.18 \quad \left[\hat{z} (\phi Z) = \hat{z} (\psi Z) \right] \supset \left[f \left\{ \hat{z} (\phi Z) \right\} \equiv f \left\{ \hat{z} (\psi Z) \right\} \right]$$

يقال لفصلان أنهما متطابقان حينما تنتمى أى خاصة لأحدهما للفصل الآخر.

$$20.3 \quad X \varepsilon \hat{z} (\psi Z) \equiv \psi Z$$

ينتمى حدما إلى فصل فقط ، عندما يشبع الدالة المحددة لذلك الفصل .

تلك هى الخصائص والتعريفات الأساسية فى مجال نظرية الفصول العامة . أما نظرية حساب الفصول والتى تبدأ بالقضية رقم (٢٢)، وتنتهى بالقضية رقم (٢٢ر٩٥) ، فأننا نجد مجموعة أساسية من التعريفات الخاصة بالعمليات الحسابية التحليلية للفصول وهى :

$$22.01 \quad (a \subset B) = \left[(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B) \right]$$

يوضح لنا هذا التعريف أن الفصل a محتوى فى الفصل B أو أن

" all a's are B's "

$$22.02 \quad a \cap B = \hat{x} (X \varepsilon a \,.\, X \varepsilon B)$$

يعطينا هذا التعريف حاصل الضرب المنطقى، أو الجـــزء المشترك لكل من الفصلين a ، B .

$$20.03 \quad a \cup B = \hat{x} \left[(X \varepsilon a) \vee (X \varepsilon B) \right]$$

يحدد لنا هذا التعريف حاصل الجمع المنطق لفصلين بأنه الفصل الذى يتكون من كل الأعضاء فى كل من فى الفصلين .

22.04 . $-a = \hat{x} \, (X \sim \varepsilon \, a)$

وهذا التعريف يحدد لنا نفى الفصل بأنه يحتوى على كل الأشياء التى ليست أعضاء فى (a) .

وهناك تعريف آخر مختصر يضعه أصحاب المبادىء وتعبر عنه القضية رقم (٢٢ر٠٥) :

22.05 $a - B = a \cap - B$

ويضيف رسل وهوايتهد فى نطاق الحساب التحليلى للفصول مجموعتين أساسيتين من القضايا :ـ

(١) مجموعة القضايا الخاصة بالقواعد الصوريه

22.51 $a \cap B = B \cap a$

22.57 $a \cup B = B \cup a$

These embody the commutative Law

22 52 $(a \cap B) \cap \gamma = a \cap (B \cap \gamma)$

22.7 $(a \cup B) \cup \gamma = a \cup (B \cup \gamma)$

These embody the associative Law

22.5 $a \cap a = a$

22.56 $a \cup a = a$

These embody the Law of tautology

22.68 $(a \cap B) \cup (a \cap \gamma) = a \cap (B \cup \gamma)$

22.69 $(a \cup B) \cap (a \cup \gamma) = a \cup (B \cap \gamma)$

These embody the distributive law

22.8 $-(-a) = a$

This is the principle of double negation

22.81 $a \subset B \equiv -B \subset -a$

This is the principle of transposition

(٢) مجموعة القضايا الخاصة بأشكال القياس

22.44 $(a \subset B) . (B \subset \gamma) \supset (a \subset \gamma)$

22.441 $(a \subset B) . (X \varepsilon a) \supset (X \varepsilon B)$

هاتان القضيتان تعبران عن القياس الأرسطى من الضرب Barbara من الشكل الأول

22.62 $a \subset B \equiv a \cup B = B$

22.621 $a \subset B \equiv a \cap B = a$

وهاتين الصورتين تعبران عن علاقة الأحتواء فى صوره معادلة

22.91 $a \cup B = a \cup (B - a)$

أى أن أيا a أو B متطابق مع a أو جزء من B مستبعد من a

ويمكن لنا أن نقدم نماذج للبراهين الرياضية على بعض القضايا الخاصة بحساب الفصول لنوضح إلى أى مدى أمكن لأصحاب «مبادىء الرياضيات» الإستفادة من الإفكار والتعريفات الأساسية التى توصل إليها الجبر التحليلى لحساب الفصول

المطلوب البرهنه على أن

$$\left[(a \subset B)\cdot(B \subset a)\right] \equiv \left[(X \varepsilon a) \equiv_x (X \varepsilon B)\right]$$

وهو ما تنص عليه القضية رقم (٤ر٢٢)

البرهان

من القضية رقم (١ر٢٢) والتى تنص على أن

$$a \subset B \equiv \left[(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)\right]$$

$$\therefore \quad a \subset B \equiv \left[(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)\right] \cdot (B \subset a)$$

$$\equiv \left[(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon a)\right]$$

ومن القضية رقم (٣٨ر٤) والتى تنص على أن

$$(P \equiv r) \supset \left[(p \vee r) \equiv (q \vee r)\right]$$

$$\therefore \left[(a \subset B)\cdot(B \subset a)\right] \equiv \left[(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)\right]$$

$$\left[(X \varepsilon B) \supset_x (X \varepsilon a)\right] = \left[(X \varepsilon a) \equiv_x (X \varepsilon B)\right]$$

هـ. ط. ث

المطلوب البرهنه على أن

$$(a \subset B) \cdot (a \subset \gamma) \equiv a \subset B \cap \gamma$$

وهذه هي صورة القضية رقم (٤٥ر٢٢) فى حساب الفصول

البرهان

من القضية رقم (١ر٢٢) والتى تنص على أن

$$a \subset B \equiv [\ (X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)$$

$$\therefore [\ (a \subset B) \cdot (a \subset \gamma)\ ] \equiv [\ (X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)\ ]$$

$$[\ (X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon \gamma)\ ] \quad (١)$$

ومن القضية رقم (٢٩ر١٠) والتى تنص على أن

$$[\ (X) \cdot \phi X \supset \psi X\ ]\ [\ (X) \cdot \phi X \supset X x\ ]$$
$$\equiv (X)\ [\ \phi X \supset \psi X \cdot X x\ ]$$

∴ بأخذ ($x \varepsilon a$) عامل مشترك من الطرف الأيمن فى رقم (١) كما تنص على ذلك القضية رقم (٢٩ر١٠) وهى قضية مبرهن عليها فى جهاز المبادىء، ينتج أن :ـ

$$(a \subset B) \cdot (a \subset \gamma) \equiv (X \varepsilon a) \supset_x [(X \varepsilon B) \cdot (X \varepsilon \gamma)]$$

، ∵ القضية رقم ٣٣ر٢٢ تنص على أن

$$X \varepsilon a \cap B \equiv (X \varepsilon a) \cdot (X \varepsilon B)$$

، ∵ القضية رقم (٤١٣ر١٠) تنص على أن

$$\phi x \equiv_x X x \cdot \psi x \equiv_x \theta x \supset [\ \phi x = \psi x$$
$$\equiv_x X x \equiv \theta x\ ]$$

∴ من القضية رقم (٣٣ر٢٢) والقضية رقم (١٣ر٤١٠) ينتج أن

$$(a \subset B) . (a \subset \gamma) \equiv [\ X \varepsilon a \supset_x X \varepsilon B \cap \gamma\ ]$$
$$\equiv a \subset B \cap \gamma$$

هـ. ط. ث

المطلوب البرهنة على أن

$$a \cap a = a$$

وهو ما تنص عليه صورة القضية رقم (٥ر٢٢)

البرهان

القضية رقم (٣٣ر٢٢) تنص على أن

$$X \varepsilon a \cap B \equiv (X \varepsilon a) . (X \varepsilon B)$$

$$\therefore\ X \varepsilon a \cap a \equiv [\ (X \varepsilon a) . (X \varepsilon a)\ ] \qquad (١)$$

، ∵ القضية رقم (٤ر٢٤) تنص على أن

$$P \equiv P . P \qquad (٢)$$

∴ بتطبيق صورة القضية رقم (٤ر٢٤) على الناتج لدينا فى رقم (١) ، ينتج أن

$$X \varepsilon a \cap a \equiv X \varepsilon a \qquad (٣)$$

من (٣) ، القضية رقم (١١ر١٠) التى تقرر أن ماهو صادق بالنسبة للكل صادق أيضا بالنسبة للجزء ، ومن القضية رقم (٤٣ر٢٠) والتي تقرر أن

$$[\,a = B\,] \equiv [\,(X\ \varepsilon\ a) \equiv_X (X\ \varepsilon\ B)\,]$$

ينتج أن

$$a \cap a = a$$

هـ. ط. ث

تلك هى بعض صور القضايا فى الحساب التحليلى للفصول توضح لنا كيفية البرهنه بطريقة رياضية على دقة التصورات المنطقية التى سبق افتراضها من خلال الجهاز الرياضى لنظرية حساب الفصول .

ولكننا نجد رسل وهوايتهد يخصصان القضية رقم (٢٤) بفروعها للبرهنةعلى الفصل الكلى ، والفصل الصفرى ، ووجود الفصول .ومن ثم نجدهم يضعون بعض القضايا الأساسية عن خصائص كل من هذه التصورات على حدة فى سلسلة من القضايا التى اعتبر بعضها بمثابة تعريفات .

التعريفات الأساسية :ـ

(١) يعرف الفصل الكلى فى القضية رقم (٢٤٫٠١) بالصيغة

$$V = \hat{x}\,(X = X)$$

(٢) يعرف الفصل الصفرى فى القضية رقم (٢٤٫٠٢) بالصيغة

$$\Lambda = -V$$

(٣) يعرف وجود الفصل فى القضية رقم (٢٤٫٠٣) بالصيغة

$$\exists\, !\, a = (\exists a)\,.\, X\ \varepsilon\ a$$

قضايا عن خصائص قضايا الفصل الكلى والصفرى

(١) القضية رقم (٢٤،٠٢) والتى تنص على أن

$$(X) . \phi X \equiv \hat{z} (\phi Z) = V$$

وكذلك القضية رقم (٢٤،٠٣) والتى تنص على أن

$$(X) . \sim \phi X \equiv \hat{z} (\phi Z) = \Lambda$$

هاتان القضيتان توضحان معا أن أى دالة صادقة دائما تحدد الفصل الكلى ، كما وأن أى داله تكون كاذبة دائما تحدد الفصل الصفرى .

(٢) قضايا توضح صورتى قانونى التناقض والثالث المرفوع وتوضحها صورتى القضية رقم (٢٤،٢١) ، القضية رقم (٢٤،٢٢)

24.21 $\quad a \cap - a = \Lambda$

24.22 $\quad a \cup - a = V$

(٣) قضايا تشير إلى خصائص الفصل الكلى والفصل الصفرى بالاشارة إلى عمليتى الاضافة addition والضرب ..multiplicatio وهذه القضايا توضحها الصور الأربع الآتية :ـ

24.23 $\quad a \cap \Lambda = \Lambda$

24 24 $\quad a \cup \Lambda = a$

24.26 $\quad a \cap V = a$

24.27 $\quad a \cup V = V$

(٤) قضايا عن خصائص التكافؤ ، ويمكن تصنيفهـا فى ثلاث قضايا أساسية هى :ـ

$$24.3 \qquad a \subset B \equiv a - B = \Lambda$$

أى أن a محتوية Contained فى B تكافىء قولنا «لاشىء هـو a ولكنه ليس B »

$$24.311 \qquad a \subset - B \equiv a \cap B = \Lambda$$

وهذه الصيغة توضح لنـا أن « لا a هى B »مكافئة لقولنا «لاشىء هو كل a ، B»

$$24.55 \qquad \sim (a \subset B) \equiv \exists ! a - B$$

أى أن « ليس كل ماهو a هو B » يكافىء قولنا «يوجد a وهى ليست B»

ولا تختلف طريقة البرهنة على هذه المجموعة من القضايا بصورة كبيرة عن طرق البرهنه السابقة المستخدمة فى خصائص الفصول ويمكن لنا أن نتبين كيفية البرهنة على معظم القضايا الخاصة بالفصل الكلى والفصل الصفرى ووجود الفصول من النماذج البرهانية الآتية :ـ

المطلوب البرهنة على صورة القضية رقم (١١ر٢٤) والتى تنص على أن

$$(a) . a \subset V$$

البرهان

القضية رقم (١٠٤ر٢٤) تنص على أن

$$(X) . X \varepsilon V \qquad (1)$$

شكاً وتنص القضية رقم (١ر١٠) عن أن

$$(X) . \phi X \supset \phi y \qquad (٢)$$

∴ من (١) ، (٢) معا ينتج أن

$$X \ \varepsilon \ V$$

وباستخدام مبدأ التبسيط Simplification المنصوص عليه فى القضية رقم (٢ر٠٢) بأن

$$q \supset p \supset q$$

$$\therefore \qquad (X \varepsilon a) \supset (X \varepsilon V)$$

∵ القضية رقم (١١ر١٠) تنص على أن ما هـو صادق بالنسبة للكل

فهو صادق أيضا بالنسبة للجزء ، ومن القضية رقم (١ر٢٢) والتى تنص على أن

$$(a \subset B) \equiv [(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B)]$$

ينتج أن

$$a \subset V$$

وباستخدام القضية رقم (١١ر١٠) ينتج أن

$$(a) . a \subset V$$

هـ . ط . ث

المطلوب البرهنة على أن

$$24.12 \qquad (a) . \Lambda \subset a .$$

البرهان

القضية رقم (١٤ر٠٥) تنص على أن

(١) $(X) . X \sim \varepsilon \Lambda$

∴ القضية رقم (١ر١٠) تنص على أن

(٢) $(X) . \phi X \supset \phi y$

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن

$X \sim \varepsilon \Lambda$

∴ القضية رقم ٢ر٢١ تنص على أن

$\sim p \supset p \quad q$

∴ ينتج أن

(٣) $(X \varepsilon \Lambda) \supset (X \varepsilon a)$

∴ من رقم (٣) ومن القضية رقم (١ر١١٠) التى تقرر أن كل ماهو صادق على الكل فهو صادق أيضا على الجزء ، ومن القضية رقم (٢٢ر١) والتى تنص على أن

$$(a \subset B) \equiv \left[(X \varepsilon a) \supset_x (X \varepsilon B) \right]$$

∴ ينتج أن

$(a) . \Lambda \subset a$

هـ. ط.

تلك بعض صور البراهين الأساسية التى نجدها فى مبادىء الرياضيات والتى توضح لنا إلى أى مدى أمكن البرهنة على المحمول ، والفصل الكلى ، والفصل الصغرى ، فى صيغ رياضية بحته تقوم على غرار البرهان الرياضى من خلال القواعد الأساسية للتعريفات المستخدمة فى النظرية العامة للفصول وحساب الفصول .

الفصل الرابع

نظرية العـــلاقات

الفصل الرابع

نظرية العلاقات

نظرية العلاقات Theory of Relations من أهم نظريات المنطق الحديث ، لأنها تلعب دوراً بالغ الأهمية فى أى جهاز منطق رياضى ، لأنه من النظر فى مسألة العلاقات تنشأ لدينا أفكاراً غاية الأهمية عن طبيعة النظرة للوجود والعالم من حولنا . وقد عرفت مسألة العلاقات بصورة دقيقة فى أبحاث دى مورجان ، وتشارلز بيرس ، وشرويدر ، إلا أن تفسير العلاقات فى الأبحاث السابقه على فترة رفض المذهب المثالى لم يكن جوهريا لأسباب نوجزها فيما يلى :-

١ - أن المناطقة الدراسون لطبيعة المنطق من منظور رياضى لم يتمكنوا من التخلص من الصورة الأساسية للقضية الحملية التى ترد اليها كل صور القضايا الأخرى، وهذا ما كشفت عنه التحليلات المعاصره ابتداء من رسل .

٢ - أن كثيرا من الخلط المنطقى إكتنف نظريات أصحاب المنطق نتيجة لعدم التمييز بين الفصول والعلاقات ، وبين تصور الفصل ، والفصل التصور ، والفصول ككثير ، وبين أنواع متعددة من العلاقات كشفت عنها التحليلات الرياضية للمعاصرين .

٣ - أن المحاولات السابقة إنتهت إلى إعمال الرياضيات فى المنطق بصورة كبيرة فى الوقت الذى لم يتطور فيه المنطق بقدر كاف ، ولذلك وجدنا أصحاب المنطق الرياضى المعاصر يتناولون بالتطوير أولا الجهاز المنطقى ليسير المنطق

والرياضيات معا فى خطين متوازيين ، وبحيث يصبح من الممكن رد الصور الرياضية لصور منطقية .

ومن ثم فإننا لانكون مبالغين إذا قلنا ، أن نظرية العلاقات هى أهم جزء فى النظرية المنطقية التى إنطلق منها « برتراند رسل » لتحطيم القيـــود التى إحتوت الفكر الفلسفى والمنطق من جراء الخطأ فى تصور العلاقه .

والحقيقة أن رسل تمكن بصورة واضحة من إقامة نظرية متكامله للعلاقات فى جانبيها ، المنطق والرياضى معا بعد أن توصل إلى إستكمال النسق الإستنباطى للمنطق على أسس رياضية ، بحيث أصبح مسلحا بأدوات تحليلية ، ورموز فنيـة دقيقة ، تمكنه من الوقوف فى مواجهة أى نزعة تحاول أن تبتلع أبحاثه بعيداً عن الرياضيات كأسلوب واضح للعلم .

ولنظرية العـلاقات ثلاثة جوانب أساسية ، جانب منطقى ، وآخـر رياضى ، وثالث فلسفى يستند إلى الصورة المنطقية التى تؤكد النظرة العلاقية. ولغرض المنطق الرياضى فإنه يتحتم علينا أن نتناول النظرية فى جانبيها المنطق والرياضى فقط ، مع الإشارة الطفيفة لبعض الاتجاهات ذات الطابع الفلسفى .

والواقع أنه يتعين علينا أن نلقى بعض الضوء على الإعتبارات التى جعلت رسل يأخذ بالنظرة العلاقية ، ويعول كثيراً على مسألة العلاقات الخارجيه ، External بل ويعتبر مبحث العلاقات من مباحث المنطق الهامة، فى الوقت الذى يلغت فيه نظرة برادلى للعلاقات الداخلية قتها .

أولا :- لمس رسل قصوراً واضحا وضعفاً شديداً فى المنطق التقليــدى والمذاهب الفلسفية التى ارتبطت به مثل مذاهب ليبنتز واسبينوزا وهيجل وبرادلى،

لأنها تستند بصورة قوية إلى أن «كل قضية لها موضوع ومحمول »[1]، هذا إلى جانب مشاركة أصحاب المذاهب المطلقة ، لأرسطو فى رأيه القائل بأنه يمكن رد كل صور القضايا الأكثر تركيبا إلى صورة القضية الحلية ، مما أدى إلى إعتبار القضية الحلية أبسط صور القضايا على الإطلاق .

ثانيا :- أن رسل حين عكف على نقـــد المثالية Idealism ، خاصة مثاليـة برادلى - أقوى المدافعين عن المذهب المثـالى أنذاك فى انجلترا - تبيّن أن برادلى أقام منطقة على أساس مذهب العلاقات الداخلية Internal Pelations ، وقد ترتب على الأخذ بهذا المذهب أن أصبحت «كل علاقة بين حدين تعبر أولا عن خصائص ذاتية للحدين »[2] . والحقيقة أن بديهية العلاقات الداخلية التى أخذ بها أصحاب المذهب المثالى ، هى التى جعلت من رسل مدافعا قويا عن مذهبه الجديد، من خلال إعتراضاته على المذهب المثالى ككل ، ومن ثم وجدنا رسل يطرح ثلاثه اعتراضات أساسية على مسألة العـلاقات الداخلية ،كما يذهب إلى ذلك مـوريس فيتز Morris Weitz فى مقاله بعنوان « الوحـــدة والتحليل فى فلسفة رسل » فى المؤلف الضخم الذى أخرجه لنا شليب .

الاعتراض الأول :- أن مسألة العلاقات الداخلية لايمكن الأخذ بها فى حالة العلاقات اللاتماثليه Asymmetrical Relaions .

الاعتراض الثانى :- أن العـلاقات الداخليـة لاتزودنا بأى معنى عن طبيعة الحد nature of Term .

---

(1) Russell, B., Logical Atomism, p. 324, ed. in. ' Logic and Knowledge '

(2) Russell, B., My Philosophical Development, p. 61

الاعتراض الثالث : ـ أن القضيه الأساسية التي تستند اليها العلاقات الداخلية والقائله بأنه « يوجد موضوع واحد فقط ومحوله » هي بالضرورة قضية كاذبة لانها تتضمن تمييزاً بين المحمول والموضوع[١] .

ثالثا : ـ أن رسل حين أخذ يدافع عن « فلسفة الذرية المنطقية » التي إتخذها مذهب صريحا له فيما بين الأعوام ١٨٩٩ - ١٩٠٠ ، وما يترتب على ذلك من تبنى المنطق الذرى فى الفلسفة ، أخـذ يشارك أصحاب الفهم المشترك الشائع Common - Sense اعتقادهم الأساسى بوجود اشياء things كثيرة ومنفصله ، ومن ثم فقد تحتم عليه أن يقبل النتائج المترتبة على النظرة الذرية للأشياء من حولنا حيث أصبح العالم مكونا من وقائع ، أبسطها جميعا الواقعة الذرية التى تشير اليها القضية الذرية بإعتبارها قضيه بسيطه ، وذات صورة متميزة تماما عن القضيه الحلية ، وبالتالى أصبحت هناك علاقات بين القضايا وبعضها ، وهنا يمكننا تفسير العالم فلسفيا ومنطقياً على أساس مخالف لما ذهب اليه أصحاب المذهب المثالى فى صورته الهيجليه على وجه الخصوص .

رابعا : ـ أن إشتغال رسل[٢] بفلسفة الرياضيات والمنطق الرياضي ، أفصح

---

(1) Weitz, M., " Analysis and unity in Russell's Philosophy". pp. 60 - 61

(٢) ظهرت أول مقالة فنية لرسل عن منطق العلاقات فى مجلة بيانو Rivista di Matematica بعنوان « منطق العلاقات مع بعض التطبيقات على نظرية المتسلسلات » فيما بين عامى ١٩٠٠ – ١٩٠١ ، وقد كتبها رسل باللغة الفرنسية، وترجمها إلى الانجليزية « روبرت تشارلز مارش » فى عام ١٩٥٦ فى كتاب « المنطق والمعرفة » – ثم تناول رسل بعد ذلك بالبحث نظرية العلاقات فى بعض مؤلفاته الهامة مثل « أصول الرياضيات » (١٩٠٣) ، و « مبادىء الرياضيات » بالاشتراك مع هوايتهد (١٩١٠ – ١٩١٣) ، « معرفتنا بالعالم الخارجى » (١٩١٤) حيث عالج العلاقات معالجة فلسفية ومنطقية ، « فلسفة الذرية المنطقية » (١٩١٨ – ١٩١٩) فى المحاضرة الثانية ، « مقدمة لفلسفة الرياضة » (١٩١٩) .

عن وجود أنواع مختلفة من العــلاقات تلعب دوراً هاماً فى فلسفة الرياضيات بأسرها ، بل وتستند اليها ، ذلك لأن جـــزءاً كبيراً من فلسفة الرياضيات معنى يبحث العلاقات ، ولكل نوع منها إستعمال مختلف عن الآخر [١].

تلك هى الإعتبارات الجوهرية التى اكتسبت ، من خلالها ، نظرية العلاقات أهمية عظمى فى نسق المنطق الرياضى المعاصر . ولكن إذا كان رسل قد ذهب إلى مذهب جديد فى العلاقات ، خلافاً لما درج عليه التقليديون من المناطقة ، فما هى حقيقة مذهب رسل فى العلاقات ، وما هى أنواعها ، وما هى أهم الخصائص التى تكتسبها العلاقات من خلال نسق المنطق الرياضى ؟ وكيف يمكن لنا أن نقوم بإجراء حساب للعلاقات وفق أفكار المنطق الرياضى ؟

إنه إذا ما نظرنا إلى حقيقة موقف رسل فيما يختص بالعلاقات ، إبتداء من مقالة عن « منطق العلاقات » حتى ظهور كتابة « مقدمة لفلسفة الرياضة » ، لوجدنا أنه يأخذ بالنظرة الماصدقية فى تعريف العلاقة ، وأوضح تعريف للعلاقات هو ذلك التعريف الذى نجده فى « مبادىء الرياضيات » . فتعريف العلاقة من وجهة نظر الماصدق extension يتمثل فى أنها فصل الأزواج couples (x ، y) التى تكون الدالة ψ (x ، y) بالنسبة لها صادقة ، ونص رسل فى هذا التعريف صريح ، حيث :

> " A relation, as we shall use the word, will be understood in extension : it may be regarded as the class of Couples (x, y) for which Some given

---

(1) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, ch. v, p. 24.

function ψ (x , y) is true " (1)

وكان رسل(٢) قد ذهب فى « أصول الرياضيات » إلى أن العلاقة هى ما يربط حداً بآخر ، وهذا ما جعله يربط حديثه عن العلاقات بمفهومه عن القضايا أنذاك ، لكنه عدل بعد ذلك عن هذا الموقف وتبنى صراحة وجهة النظر الماصدقية بدلا من الاعتماد على المفهوم أساساً ، وذلك بعد ما تبين له من أن المنطق الرياضى يستند حقيقة إلى الماصدق أكثر من المفهوم فى أكثر أجزاءه . ومن ثم فقد أخذ يميز صور أساسية ومتعددة عن أنـــــواع العلاقات مما أتاح له الفرصة لإقامة حساب العلاقات فى « مبادىء الرياضيات » .

المصطلحات الأساسية للعلاقات

(١) مربع العلاقة Square of Relation

يعرف رسل مربع العـــــلاقة بأنه « تلك العلاقه التى تنشأ بين حدين x ، z عندما يوجد لدينا حد متوسط y ، بحيث أن العلاقة التى لدينا تقوم بين x ، y وبين y ، z »(٣) ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات علاقة « الجد للأب » والتى ينظر إليها مربع علاقة الوالد .

(٢) ميدان العلاقة domain of Relation

---

(1) Russell, B, & whitehead, A. N., Principia Mathematica, vol. 1, p. 201.

(2) Russell, B., Principles of Mathematics, 94.

(3) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, p. 32.

يتكون ميدان العلاقة من كل الحدود التى لها نفس العلاقة مع شىء ما أو غيره [١] .

(٣) الميدان العكس للعلاقة Converse domain of Relation

الميدان العكس للعلاقة يتألف من كل الحدود التى يكون لشىء ما معها نفس العلاقة[٢] .

(٤) مجال العلاقة Field of Relation

يتألف مجال العلاقة من ميدان العلاقة وميدانها العكس معا [٣] . فاذا كانت الأبوة هى العلاقة الأساسية فإن الآباء يكونون ميدان العلاقة ، أما الأبناء فيكونون ميدانها العكس ، والآباء والأبناء معا هما مجال العلاقة .

(٥) عدد العلاقة Relation - number

يعرف عدد علاقة ما معطاه لدينا بأنه « فصل كل العلاقات المتشابهة مع العلاقة التى لدينا » [٤] .

تصنيف العلاقات

يمكن لنا تصنيف العلاقات فى نوعين أساسيين هما :ـ

(١) العلاقات التماثليه Symmetrical Relations

---

(1) Ibid.

(2) Ibid.

(3) Ibid.

(4) Ibid, p. 56.

(٣) العلاقات المتعدية Transitive Relations

وبين هذين النوعين من العلاقات تتدرج أنواع فرعية أخرى من العلاقات العامة ، وقد أقمنا هذا التصنيف وفقاً لمذكرة رسل الأساسية التى أعلنها فى « مقدمة لفلسفة الرياضيات » ، حيث يصنف العلاقات فى قسمين كبيرين ، هما قسمى العلاقات التماثلية والمتعدية ، وفى إطار العلاقات التماثلية نجـــده يضيف نوعى العلاقات اللاتماثلية asymmetrical وجائزة التماثل non - Symmetrical ، وفى مجـال العلاقات المتعدية يصنف نوعين آخـرين من العلاقات هما العـلاقات اللامتعدية Intrasitive وجائزة التعدى[1] non - transitive .

النوع الاول : علاقات التماثل وأنواعها

(١) العلاقات التماثلية

يقال لعلاقة ما أنها تماثلية[2] ، إذا كانت العلاقة التى تقوم بين A ، B هى ذاتها التى تقوم بين B ، A . ومن أمثلة هذه العلاقات علاقة المساواة equality وعلاقة الأخ ، والأخت ، فإذا قلنا أن $x = y$ فان $y = x$.

(٢) العلاقات اللاتماثليه

أما العلاقه اللاتماثليه[3] ، فهى تلك العـــلاقه التى إذا قامت بين A ، B لاتقوم بين B ، A . ومن أهم أمثلة هـــذا النوع من العلاقة ، علاقة « أكبر من » greater than وعلاقة « أصغر من » Less than ، فاذا كانت $A > B$ فانه لا يمكن القول بأن $B > A$.

(1) Ibid, p. 57.

(2) Ibid.

(3) Ibid.

(٣) العلاقات جائزة التماثل

هى كل العلاقات الغير متماثلة[1] . ومن أهمها علاقة « الأخ » ، فاذا كان A أخ B فانه قد يكون B أخت A .

النوع الثانى : علاقات التعدى وأنواعها

(١) العلاقات المتعدية

العلاقة المتعدية[2] تكتسب هذه الخاصية ، إذا ما كانت تقوم بين A ، B، وبين B ، C فإنها تقوم أيضا من A ، C . ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات ، علاقة قبل Before ، وبعد after ، أكبر ، فوق. والعلاقات المتعدية هى فى أساسها علاقات لاتماثلية ، لكنه قد يحدث فى كثير من الأحيان أن تكون العلاقات المتعدية ، علاقات تماثلية ، مثل علاقه المساواة ،أو علاقه الذاتيه بالنسبه للألوان ، أو علاقه التساوى فى العدد .

(٢) العلاقات اللامتعديه

يقال لعلاقه ما أنها لا متعديه[3] إذا قامت علاقه ما بين A ، B ، وبين B ، C فإنها لاتقوم بين A ، C مطلقا . ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات، علاقه « والد » لأنه إذا قلنا أن A والد B ، B والد C فان هذا لا يتضمن بالضرورة أن A والد C .

---

(1) Ibid.

(2) Ibid.

(3) Ibid, p. 58.

(٣) العلاقات جائزة التعدى

العلاقه جائزة التعدى[1] هى تلك التى تكتسب هذه الخاصيه عندما لا تكون متعديه . ومن أمثلتها علاقه « أخ » وكل علاقات عدم التشابه dissimilarity .

أنواع العلاقات الأساسية بين الحدود

وللعلاقات أنواع كثيرة . ولكل نوع منها خصائص متعددة فضلا عما تكتسبه من أهمية بالنسبة للنسق الإستنباطى ككل . ومن أهم هذه العلاقات :-

(١) علاقة واحد - كثير One - Many

يعد هذا النوع من العلاقة من أهم العلاقات على الإطلاق خاصة فى فلسفة الرياضيات ، فعلاقة واحد بكثير هى « العلاقة التى تكون لحد واحد مع حد معلوم »[2] . ومن أمثلة هذا النوع علاقة والد - والده - علاقة الزوج - مربع كذا ... الخ . فاذا قلنا أن « حسن والد أحمد » ، فإنه لايمكن لأى فرد آخر أن يكون والد أحمد سوى حسن ، ذلك لأن علاقة « والد » هى فى جوهرها علاقة تعبير عن الرابط الذى يربط « حسن » و« أحمد » ، على حين قد يكون « لحسن » باعتباره والد « أحمد » نفس العلاقة مع اشخاص آخرين « غير أحمد » .

ومن أهم الخصائص التى تتميز بها علاقة واحد بكثير ما يلى :-

أ :- أنه يمكن لنا من الناحية الصورية البحته أن نستغنى عن كل العلاقات ونستخدم بدلا منها علاقة واحد بكثير .

---

(1) Ibid, p. 57.

(2) Ibid, p. 45.

ب ـ أن هذا النوع من العلاقة يدخل فى كل العبارات التى لها الصورة وكذا وكيتنا من كيت وكيت « " the so - and - so of such -and - such " » العبارة « زوجـــة سقراط » تصف شخصا ما عن طريق علاقة واحد بكثير ، مع حد معلوم لدينا[1] ، فالأوصاف descriptions فى حقيقة أمرها أمثلة صادقة لعلاقة واحد بكثير ، وكذلك جميع الدوال الرياضية mathematical functions :

حـ ـ أن أهمية تحديد علاقة واحد بكثير ، تتمثل فى أنه لايمكن أن يكون لدينا أكثر من حد واحد فى طرف البداية[2] .

د ـ أن حاصل الضرب النسبي[3] relative product لهذه العلاقة مع عكسها يتضمن بالضرورة مفهوم الذاتية لأن حاصل الضرب النسبي لعلاقتين R ، S هو العلاقة التى تقوم بين x ، z حينما يوجد حـــد متوسط y ، كأن تكون لـ x نفس العلاقة التى بين R ، y وتكون لـ y نفس العلاقة التى بين S ، Z .

(٢) علاقة واحد ـ واحـد One - One

يمكن إشتقاق التعريف الصورى لهذه العلاقة من تعريف علاقة واحد بكثير ، أو بمعنى آخر هى علاقة واحـد بكثير ، وكثير بواحد ،فهى تلك العـــلاقات التى يتضمن حاصل ضربها النسبي ، مع عكسها ، التطابق[4] . فاذا قلنا « سقراط زوج اكسنتيب » ، فاذا إذا ما أشرنا إلى « سقـــراط » بالرمز A وإلى « أكستيب »

---

(1) Ibid, p. 46.

(٢) زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، جـ١ ، ص١٦٧ .

(3) Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, p. 47.

(4) Ibid, p. 47.

بالرمز B ، فانه بالنسبة للعلاقة « زوج » فإن A حد متعلق به referent على حين أن الحد B متعلق relatum . أما بالنسبة للعلاقة « زوجة » فان الحد B يكون هو المتعلق به ، ويكون الحد A هو المتعلق ، ومن ثم فان لكل من العلاقة وعكسها جهتان متضادتان opposite senses[1] .

ولا شك أن هذه الخاصة من أدق الخصائص التي تميز علاقة واحد بواحد ، لأنها تزودنا بالترابط بين فصلين ، أى ترابط حد بآخر ، بحيث يصبح كل حد فى أى فصل من الفصلين مترابطا مع الحد الآخر فى الفصل الآخر . وفكرة الترابط فى حد ذاتها يمكن معرفتها عند لا يكون للفصلين عضو مشترك . وتتميز علاقة واحد بواحد بخاصيتين أساسيتين هما :ـ

(أ) الخاصية الاولى : أن حاصل الضرب النسبي للعلاقة وعكسها يتضمن التطابق ، لأن حاصل الضرب النسبي لعلاقتين لا تنسحب عليه صفة التبادل . مثال ذلك أن حاصل الضرب النسبي للوالد والأخ هـــو « العم » ، أما حاصل الضرب النسبي للأخ والوالد هو « الوالد » .

(ب) الخاصية الثانيه : أن علاقة واحد بواحد تعطينا ترابطا بين فصلين ، بحيث يرتبط كل حد فى أى من الفصلين بحد آخر فى الفصل الآخر .

(٣) علاقة التشابه Similarity of Relations

تعتبر علاقة التشابه من العلاقات الهامة التى أولاها رسل عناية فائقه ، ذلك لأن التشابه يكتسب عـــدد من الخصائص الجوهرية فى نص للمنطق الرياضى والرياضيات معا .

---

(1) Ibid, p. 49.

والفصلان من الأشياء يقال لهما أنهما متشابهان حين يكون لهما نفس عـــدد الحدود ، أو بمعنى آخر ، حين تكون علاقة واحد بواحد ميدانها أحد الفصلين ، والفصل الآخر ميدانها العكس(١) .

ويقال لعلاقتين P ، Q أنهما متشابهتان إذا ما كانت هناك علاقة واحـــد بواحد بحيث تكون S ميدان مجال P ، وميدانها العكس مجال Q ، وبحيث إذا كان للحد P علاقة مع حد آخر ، فان الحد المترابط مع الحد P تكون له العلاقة Q ، مع الحد المترابط الآخر ، والعكس صحيح (٢) . فالعلاقتان إذن تكون متشابهان إذا قامت علاقة الترابط بين حدى العلاقة .

ومن أهم الخصائص التي تتميز بها علاقة التشابة ما يلي :-

(أ) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين تتضمن التعدد ، فان العلاقة الأخرى تكون كذلك .

(ب) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين متعدية فان العلاقة الأخرى تكون متعدية أيضا .

(حـ) أنه إذا كانت احدى العلاقتين تسلسليه فان الأخرى تكتسب نفس الصفة .

(د) أن ما يطبق على إحدى العلاقتين من علاقة واحدة بكثير أو علاقة واحد بواحد ينطبق على العلاقة الأخرى .

والسؤال الآن كيف يمكن لنا أن نجمـــع معا كل العلاقات المتشابهة على علاقة معلومة ؟

---

(1) Ibid, pp. 52 - 53.

(2) Ibid, p. 53.

لقد أوضح رسل بصورة دقيقة أنه يمكن إقامة هذا الإجراء عن طريق « عدد العلاقة » الذى هو فصل كل العلاقات المتشابهة مع العلاقة التى لدينا ، فأعداد العلاقات هى إذن كل فصول العلاقات التى تكون لكل العلاقات ، فعدد العلاقة يتمثل فى فصل العلاقات المتكون من كل العلاقات المتشابهة مع عضو واحد من الفصل ، وهذه الفكرة هى ما يهم الرياضيين خاصة فى مجال للتسلسلات .

حساب العلاقات

يقوم حساب العلاقات على مجموعة من القضايا الأساسية عن العلاقات التى تعد تماما كالقضايا الابتدائية فى حساب القضايا ، ويستند هذا النوع من النظريات إلى مجموعة اساسية من الرموز والتعريفات :

أولا :- الرموز الأساسية : Baoic Symbols

تستخدم نظرية العلاقات مجموعة من الرموز الأساسية فى جانبها التحليلى ، ومن أهم هذه الرموز :-

١ - يرمز للعلاقة بالحرف اللاتينى الكبير R لمتغير ظاهر apparent variable

٢ - يرمز للمتغير Variable بالصيغة (x , y) ! $x \hat{y} \phi$

٣ - يرمز للعلاقة الكلية Universal Relation بالرمز $\dot{V}$

٤ - يرمز للعلاقة الصفرية null Relation بالرمز $\dot{\Lambda}$

٥ - أنه إذا ما قامت العلاقة بين زوج واحد على الأقل من الحدود فانه يرمز لها بالرمز " $\dot{\exists}$! R " أى « توجد R »

٦ - يرمز لعكس العلاقة R بالرمز $\breve{R}$ وتقرأ " R - Converse "

٧ - يرمز للعلاقة بالرمز $\overrightarrow{R}$ إذا كانت تسير من (x) إلى (y) ، ويرمز لها بالرمز $\overleftarrow{R}$ إذا كانت تسير من (y) إلى (x)

٨ - يرمز إلى ميدان العلاقة R بالرمز D'R

٩ - يرمز لعكس الميدان بالرمز Ɑ'R

١٠- يرمز إلى مجال العلاقة بالرمز C'R

١١- يرمز إلى حاصل الضرب النسبي لعلاقتين R ، S بالرمز "R ¦ S"

ويعرف أصحاب « المبادئ » العلاقة فى القضية رقم (٢١٫٠٣) على النحو التالى :

$$Rel = \hat{R} \left\{ (\exists \phi) . R = \hat{x} \hat{y} \phi ! (x, y) \right\}$$

القضايا الأساسية عن خصائص العلاقات

(١) يقال لعلاقتين أنهما متطابقتين فقط عندما تكون الدوال المعرفة لها متكافئة صوريا Jormally equivalent والصيغة الرمزية لهذه الخاصية هى

$$21.15 \qquad \left[\psi (x, y) \equiv_{x,y} X (x, y) \right] \equiv \left[\hat{x} \hat{y} \psi (x,y) = \hat{x} \hat{y} X (x, y) \right]$$

(٢) يقال لعلاقتين أنهما متطابقتين فقط عندما تقوم كل من العلاقتين بين نفس الأزواج من الحدود

$$21.31 \quad [\hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}X(x.y)]$$

$$\equiv [x\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}y]$$

$$\equiv_{x,y} [x\{\hat{x}\hat{y}X(x,y)\}y]$$

ويمكن التعبير عن هذه الصيغة بالصيغة التالية

$$21.43 \quad [R = S] \equiv [xRy] \equiv_{x,y} [XSy]$$

(٣) أما القضيتين الآتيتين فتوضحان أن العلاقات المتطابقة هى فى جوهرها إنعكاسية reflexive وتماثلية Symmetrical ومتعدية transitive

$$21.2 \quad \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$$

$$21.22 \quad \hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}\psi(x,y)$$

$$[\hat{x}\hat{y}\psi(x,y) = \hat{x}\hat{y}X(x,y)]$$

$$\supset [\hat{x}\hat{y}\phi(x,y) = \hat{x}\hat{y}X(x,y)]$$

(٤) يقال لحدين أن لهما علاقة معلومة عندما يشبعان Satisfy دالة معرفه

$$21.3 \quad [x\{\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)\}y] = [\psi(x,y)]$$

(٥) أنه يمكن تحديد كل علاقة عن طريق دالة حملية predicative function

$$21.151 \quad (\exists\phi).\hat{x}\hat{y}(x,y) = \hat{x}\hat{y}\phi!(x,y)$$

التعريفات الأساسية فى حساب العلاقات

$$23.01 \quad (R \subset\!\!\!\cdot\; S) = \left[(x R y) \supset_{x,y} (x S y) \right]$$

$$23.02 \quad (R \dot{\cap} S) = \hat{x}\hat{y} (x R y . x S y)$$

$$23.03 \quad R \dot{\cup} S = \hat{x}\hat{y} \left[(x R y) \vee (x S y) \right]$$

$$23.04 \quad \dot{-} R = \hat{x}\hat{y} \left\{ \sim (x R y) \right\}$$

$$23.05 \quad R \dot{-} S = R \dot{\cap} \dot{-} S$$

كما ويضع أصحاب المبادىء ثلاث تعريفات أساسية للعلاقة الكلية والعلاقة الصفرية ووجود العلاقات كما توضحها القضايا الآتية :ـ

$$25\ 01 \quad \dot{V} = \hat{x}\hat{y} \quad x = x . y = y)$$

$$25.02 \quad \dot{\Lambda} = \dot{-} \dot{V}$$

$$25.03 \quad \dot{\exists} ! R = (\exists x, y) . x R y$$

والحقيقة أن البرهنة على قضايا حساب العلاقات تسير وفق نظام البرهنة المتبع فى نظرية حساب الفصول ، ولذلك وجدنا رسل وهوايتهد وهما بصدد عرض النظرية العامة للعلاقات وحساب العلاقات لايقدمان لنا أى نوع من البرهنة الجديد، بل نجدهما يشيران إلى انماط القضايا الخاصة بالعلاقات فقط ويميلان القارىء إلى طرق البرهنة المستخدمة فى مجـــال نظرية حساب الفصول ، مما يؤكد أن طريقة البرهنة فى مجال النظريتين واحدة . لكن ثمة أمر جديد وهام فى مجال العلاقات ،

ويتمثل فى الجزء الخاص بحساب ميـــدان العلاقات أو عكسها مما تتناوله نظرية العلاقات بالبحث التفصيلى والتحليل الرياضى فى القسم الثالث من الجزء الأول من كتاب المبادىء بعنوان « منطق العلاقات » . ولذا فاننا سنتناول كل موضوع من موضوعات القسم الثانى على حده لتعرض فيه لأهم القضايا وبعض نماذج البراهين.

أولا :ـ عكس العلاقات Converses of Relations

توجد لدينا فى إطار هذا الموضوع ثلاث قضايا أساسية تحـــدد خصائص عكس العلاقة وهى :ـ

31.13 $\quad E \,!\, Cnv \text{‘} P$

كل علاقة لها عكس

31.32 $\quad \left[P = Q \right] \equiv \left[\breve{P} = \breve{Q} \right]$

يقال لعلاقتين أنهما متطابقتان فقط ، إذا ما كان عكسها كذلك

31.33 $\quad Cnv \text{‘} Cnv \text{‘} P = P$

أى علاقة هى عكس عكسها

نماذج البرهين

[١] برهن على أن

31.12 $\quad \breve{P} = Cnv \text{‘} P$

البرهان

تنص القضية رقم (١٠١ر٣١) على أن

$$(Q \text{ Cnv } P) . (R \text{ Cnv } P) \supset Q = R \quad (١)$$

بوضع $\breve{P}$ مكان R فى رقم (١) ينتج أن

$$(Q \text{ Cnv } P) . (\breve{P} \text{ Cnv } P) \supset Q = \breve{P} \quad (٢)$$

والقضية رقم (١١١ر٣١) تنص على أن

$$\breve{P} \text{ Cnv } P$$

وهى قضية صادقة ، إذن يمكن حذفها من رقم (٢) فينتج أن

$$(Q \text{ Cnv } P) \supset Q = \breve{P} \quad (٣)$$

من رقم (٣) والقضية (١١ر١٠) التى تقرر أن ما هو صادق بالنسبة الكل فهو صادق أيضا بالنسبة للجزء ، ومن القضية رقم (١١١ر٣١) ينتج أن

$$(\breve{P} \text{ Cnv } P) \; (Q \text{ Cnv } P) \supset_Q Q = \breve{P}$$

ومن القضية رقم (٣١ر٣٠) والتى تنص على أن

$$[x = R \text{ ʻ} y] \equiv (x R y) [z R y \supset_z z = x$$

ينتج أن

$$\breve{P} = \text{Cnv ʻ} P$$

ﻫ. ط. ث

[٢] برهن على أن

$$\text{Cnv} ' \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda} \qquad 31.21$$

البرهان

تنص القضية رقم (٣١٫٠٣١) على أن

$$x \,(\text{Cnv} ' P)\, y \equiv y \,P\, x$$

بتطبيق هـــذه الصورة على صورة القضية رقم (٣١٫٢١) التى لدينا ينتـج أن

$$x \,(\text{Cnv} ' \dot{\Lambda})\, y \equiv y \,\dot{\Lambda}\, x \qquad (١)$$

وتنص القضية رقم (٢٥٫١٠٥) على أن

$$(x, y) \,.\, \sim (x \,\dot{\Lambda}\, y) \qquad (٢)$$

∴ من بتطبيق رقم (٢) على الصورة التى لدينا فى (١) ينتج أن

$$\sim x \,(\text{Cnv} ' \dot{\Lambda})\, y \qquad (٣)$$

من رقم (٣) ومن القضيـة رقم (١١٫١١) التى تنص على أنه إذا كانت $\phi (z, \omega)$ صادقة مهما كانت Z و ω فان

$$(x, y) \,.\, \phi (x, y)$$

تكون صادقة

ومن القضية رقم (٢٥٫١٥) والتى تنص على أن

$$[(x, y) \cdot \sim (x R y)] \equiv [R = \dot{\Lambda}]$$

ينتج أن

$$Cnv ‘ \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}$$

هـ. ط. ث

ثانيا : الميادين ، عكس الميادين ومجالات العلاقات

Domains, Converse Domains, And Fields of Relations

يقوم حساب الميدان والميدان العكس ومجال العلاقات على أساس مجموعة من التعريفات والصيغ الأساسية :ـ

الصيغ الأساسية

(١) ميدان العلاقة $D‘R = \hat{x} \{(\exists y) \cdot x R y\}$

(٢) عكس الميدان $Ɑ‘R = \hat{y} \{(\exists y) \cdot x R y\}$

(٣) مجال العلاقة $C‘R = \hat{x} [(\exists y) \{(x R y) \vee (y R x)\}]$

التعريفات الأساسية

33.01 $D = \hat{a} \hat{R} [a = \hat{x} \{(\exists y) \cdot x R y\}]$

33.02 $Ɑ = \hat{B} \hat{R} [B = \hat{y} \{(\exists x) \cdot x R y\}]$

33.03 $C = \hat{Y} \hat{R} [Y = \hat{x} \{(\exists y) \{(x R y) \vee (y R x)\}\}]$

$$33.04 \quad F = \hat{x}\hat{R}\left[(\exists y)\{(x R y) \vee (y R x)\}\right]$$

نماذج البراهين

(١) المطلوب البرهنة على أن

$$33.22 \qquad C'R = C'R$$

البرهـــان

من القضية رقم (١٦ر٣٣) والتى تنص على ان

$$C'R = D'R \cup \text{Ɑ}'R$$

والقضية رقم (٢ر٣٣) والتى تنص على أن

$$\text{Ɑ}'R = D'\breve{R}$$

والقضية رقم (٢١ر٣٣) التى تنص على أن

$$D'R = \text{Ɑ}'\breve{R}$$

نستنتج أن

$$C'R = \text{Ɑ}'\breve{R} \cup D'\breve{R}$$

ومن القضية رقم (١٦ر٣٣)

$$\therefore \quad C'R = C'R$$

[٢] المطلوب البرهنه على أن

$$33.15 \quad \overrightarrow{R}‘y \subset D‘R$$

البرهان

تنص القضية رقم (١٨ر٣٢) على أن

$$x \in \overrightarrow{R}‘y \equiv x R y$$

ومنها نستنتج أن

$$x \in \overrightarrow{R}‘y \supset_x x R y$$

ومن القضية رقم (٢٤ر١٠) والتى تنص على أن

$$\phi y \supset (\exists x) . \phi x$$

نستنتج أن

$$x \overrightarrow{R}‘y \supset_x (\exists y) . x R y$$

ومن القضية رقم (١٣ر٣٣) والتى تنص على أن

$$x \in D‘R \equiv (\exists y) . x R y$$

$$\overrightarrow{R}‘y \subset D‘R$$

و. ط. ث

ثالثا :- حاصل الضرب النسبي لعلاقتين

توجد لدينا ثلاث تعاريف أساسيه فى حاصل الضرب النسبي هى

34.01 $R \backslash S = \hat{x}\hat{z}\left[(\exists y) . \left\{ (x R y) . (y S z) \right\} \right]$

34.02 $R^2 = R \backslash R$

34.03 $R^3 = R^2 \backslash R$

نماذج البراهين

برهن على أن

34.54 $x R x \supset x R^2 x$

البرهان

القضية رقم (٢٤ر٤) تنص على أن

$$P \equiv P . P$$

ومنها نستنتج بالتطبيق على صورة القضية التى لدينا أن

$$x R x \supset (x R x) . (x R x)$$

ومن القضية رقم (٢٤ر١٠) التى تنص على أن

$$\phi y \supset (\exists x) . \phi x$$

نستنتج أن

$$x\,R\,x \supset (\exists y)\,[\,(x\,R\,y)\,.\,(y\,R\,z)\,]$$

ومن القضية رقم (٢٤٫٥) التى تنص على أن

$$x\,R^2\,y \equiv (\exists z)\,[\,(x\,R\,z)\,.\,(z\,R\,y)\,]$$

∴ نستنتج أن

$$x\,R\,x \supset x\,R^2\,x$$

هـ. ط. ث.

إتضح لنا مما سبق من البراهين أن نظام البرهنة فى نطاق نظرية حساب العلاقات يسير وفق الجهاز العام للاستنباط فى نسق مبادئ الرياضيات . الا أن هناك صورا أخرى متقدمة من حساب العلاقات قد استبعدت من ميدان هذه الدراسة أساساً لانها مما يهم الرياضيين بصورة مباشرة ، ولذلك فقد فضلنا أن نعرض فقط جانب حساب العلاقات فى إطار أبحاث المنطق الرياضى .

الباب السادس

نظرية الأوصاف

الباب السادس

نظرية الأوصاف

Theory of Descriptions

فضلنا أن نعالج نظرية الأوصاف بعيدا عن النظريات الأربعة الأساسية للنطق الرياضى ، لأن هذه النظرية تتمتع بأهمية كبرى فى الجهاز المنطقى والنسق الفلسفى لرسل . فلم تشهد نظرية من نظريات المنطق الحديث اهتمام رسل المباشر ، بقدر ما أتيح هذا لنظرية الأوصاف .

والواقع أن تأسيس نظرية الأوصاف يعد عملا ضخما فى عالم الفكر المنطقى والفلسفى على السواء للأسباب الآتيه : —

أولا : — أن النظرية فى حد ذاتها عملا إبتكاريا جديدا ، فالأفكار التى تتناولها لم ترد من قبل فى أعمال السابقين على رسل .

ثانيا : — أن النظرية تعتبر أداة منطقية مفيده ـ على حد قول موريس فيتز[1] ـ فى إقامة تمييزات منطقيه دقيقه بين إسم العلم proper name ، العبـــارة الوصفية descripative phrase ، أو بين الرمز البسيط والرمز المركب .

ثالثا : — ومن الناحية الإيستمولوجية فإن نظرية الأوصاف تميز بين المعرفه بالإتصال المباشر Knowledge by acquaintance والمعرفة بالوصف Knowledge

---

(1) Weitz, M., Analysis and unity in Russell's Philosophy p. 95

by description ، رغم أننا قد نجد هذه الناحية فى أعمال القديس أوغسطين Augustine ، على حد قول روبرت مارش (١) Marsh .

رابعا : — أن نظرية الأوصاف هى بمثابة رد قوى على نظريات السيكولوجيين من أمثال برنتانو Brentano ومينونج Meinong .

خامسا : — أن رسل إستطاع أن يضع نظرية الأوصاف كجزء أساسى من النسق الإستنباطى « لمبادىء الرياضيات » .

تلك هى الإعتبارات الأساسيه التى أعتبرت من أجلها نظرية الأوصاف عملا إبتكاريا فى مجال الفلسفـــة والمنطق على السواء ، والتى جعلت « فرانك رامزى » F. Ramsey يصفها بأنها « نموذج الفلسفة » Paradigm of philosophy(٢) .

لقد تابع رسل دراسات « فريجـــه » فى المعنى والدلالة meaning and denotin ، حيث أهتم بدراسة التحليل المنطقى للرموز دراسة مركزة من أجل تطوير دراسات المنطق . ومن ثم فقد تحتم عليه أن يضع دراسات السابقين كعادته دائما حينما يناقش نظرية من النظريات المنطقية . تحت مجهر التحليـــل المنطقى الدقيق .

ومن النظريات العامة التى ركز رسل على دراستها نظرية « برنتانو » فى تحليله للادراك إلى عناصر ثلاث هى ، الفعل act ، والمحتوى أو المضمون Content ، والموضـــوع object ، والتى تابعه فيه « مينونج » (٣) تحت تأثير نزعتـــه السيكولوجية .

(1) Marsh, R. C, (ed). logic and knowledge, p. 25
(2) Ramsey, F., The Foundations of Mathematics, P: 263
(3) Russell, B., On Propositions, P. 305, ed· in. " Logic and Knowledge "

وجد رسل أن الاتجاه السيكولوجي في تحليل الإدراك ، على هذا النحو، لا يتفق مع ما ذهب اليه « وجورج مور » في إتجاهها الواقعي الجديد . لان تمييز السيكولوجيين ينطوى على التمييز بين « المضمون الموضوعي » Objective Content « وموضوع الادارك » object of perception ، وهذا التمييز من وجهة نظر رسل ومور ليس ضروريا ، لأنه ينطوى على تناقض .

والحقيقه أن رسل في صدر شبابه وحتى تدوين « أصول الرياضيات » كان يشارك « مينونج » معظم مواقفه الأساسية ، إلا أنه فيما بعد « الأصـــول » أخذ يراجع مواقفه الأساسيه فيما يختص بنظرية المعرفة ، خاصة وقد تبين له أن هذا الموقف لن يمكنه ، بصفة نهائية ، من رفض دعوة المثاليين التى أتضح فسادها . ونتيجة لمراجعة نظرية مينونج توصل رسل لنظرية الأوصاف التى تناولها بالصياغة والشرح والتنقيح أكثر من أربعة وخمسين عاما [1] .

---

(١) ظهرت أول صياغة لنظرية الأوصاف في مقالة رسل بعنوان On Denoting التى نشرت فى مجلة مايند Mind عام (١٩٠٥) حيث عرض لنا موقفه الأساسي بالنسبة للعبارات الداله وإسم العلم ، ثم أخذ يناقش موقف « مينونج » .

وفي عام (١٩١٠) ناقش رسل النظرية في مبادىء الرياضيات حيث صدر الجزء الأول ، وقد جاءت مناقشته للنظرية وجهازها الاستنباطي في المواضع الآتيه : —

(أ) من ص ٣٠ إلى ص ٣٢ (ب) من ص ٦٦ إلى ص ٧١ (جـ) من ص ١٧٣ إلى ص ١٨٦ .

وصدرت في عام (١٩١١) مقالة أخرى لرسل تتناول هذا الموضوع بعنوان :

Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description

لكن مناقشة للنظريه إبستمولوجيا ومنطقيا وردت بصورة حاسمة في « مشكلات الفلسفه » . ||

تقوم النظرية الأوصاف التي يقول بها رسل على إقامة تمييز بين نوعين من الرموز وهما: أسماء الأعلام، والأوصاف. فاسم العلم هو الرمز البسيط(١)، يشير إلى جزئي موجود في الخارج. وهذا الجزئي الموجود في الخارج هو معنى الرمز. والرمز هو ما يشير إليه، ويكون لاسم العلم معنى مستقل تماما عن بقية الألفاظ التي تؤلف الجملة أو القضية.

أما الوصف، فهو رمز مركب Complex Symbole مثل «مؤلف ويفرلي»، The author of weverley. وهذا الرمز المركب لا يشير إلى الفرد مباشرة، أي الموضوع الحقيقي الموجود في الخارج كما هو الحال بالنسبة لاسم العلم. والرمز المركب، أي الوصف يطلق عليه رسل مصطلح الرمز الناقص incompl-

---

= [illegible] عام ١٩١٢ (The problems of philosophy) ثم عرض مرة أخرى في مقالة صدرت عام (١٩١٤) بعنوان The Nature of Acquaintance حيث أخذ يناقش نظريات «ماخ» Mach و«جيمس» James، وعرض شيئا من [illegible] مواقفه الأساسي نظرية الشهيرة (بالواحدية المحايدة) Neutral Monism، وفي عامي (١٩١٨، ١٩١٩) حاول شرح النظرية شرحا دقيقا من خلال (فلسفة الذرية المنطقية) The philosophy of logical Atomism، وبعد فترة أرغم على قضائها داخل السجون نتيجة لمناهضة الحرب وتظاهرات إنجلترا فيها، كتب رسل مرة ثانية عن نظرية الأوصاف في «مقدمة فلسفة الرياضة» Introduction to Mathematical philosophy (١٩١٩) وقد رد رسل على بعض الانتقادات (جورج مور) الخاصة بنظرية الأوصاف وهي نشرت في المؤلف الذي أعده شليب عام (١٩٤٤) [illegible] وعاد رسل آخر كتبه الفلسفية «تطوري الفلسفي» My philosophical Development حيث عرض [illegible] النظرية عرضا دقيقا وعرض لجوانبها الأساسية.

(١) Russell, B., P. L. Atomism, P. 244

ete Symbols ، لانه لا معنى له بمفرده ، أو بمعزل عن بقية ألفاظ القضية ، لان الوصف يكتسب معناه من خلال سياق الحديث مع غيره من الرموز .

والاوصاف تبعا لنظرية رسل نوعان :

(١) أوصاف محدده definite descriptions وهي الأوصاف التي تشير عباراتها إلى شيء معين ، أو جزئي مسبوق بأداة التعريف « أل » ، وتكون صورتها « الكذا وكذا » [1] (The So-and-So) .

(٢) الوصف المبهم Ambiguous description

وهو ذلك الوصف الذي يدل بإبهام مثل « قابلت رجلا » وهذا النوع من الوصف يتخذ صوره « كذا وكذ » عند الحديث " a so - and - so " .

أهتم رسل بتحليل القضايا التي تحتوى على أوصاف محددة ، لان تحليل مثل هذه القضايا يمكننا من الحديث عن الموضوعات المتناقضه بذاتها self-contr- adictory ، تلك الموضوعات التي لا تقوم في الواقع الخارجي ، وليست لدينا إمدادات حسية بها ، ويكون وجودها ممكن فقط من ناحيه التصور المنطقي ، وبالتالي فإن القضايا التي تتضمن أوصافاً محدده ، يصبح أمر معالجتها على أنها دوال قضايا ذات متغيرات أمراً سهلا . وهذا ما جعل رسل يؤكد لنا أن العباره :

« تدل بمقتضى صورتها ، ومن ثم فانه ينبغي أن »

« تميز بين حالات ثلاث : (١) أن العباره قد تدل ، »

« ولا تدل على أي شيء في نفس الوقت مثل « الملك الحالي »

(1) Russell, B., (a) P. L. Atomism, P. 234 (b) Introduction to Mathematical philosophy, ch. 16

« لفرنسا » ؛ (٢) أن العباره قد تـدل على موضوع «
« واحد محدد ، مثل « الملك الحالى لانجلترا » فهى تدل على »
« شخـص معين بالذات ؛ (٣) أن العبارة قد تـدل »
« بإبهام مثل « رجلا ما » فإنها لا تدل على رجال كثيرين ، »
« بل على إنسان ما مبهم . » [1]

هنا نتساءل : ما هو تحليل رسل للعبارات الدالة ؟

ينبثق تحليل رسل للعبارات الداله denoting phrases من فكرته عن المتغير [2] ، فاذا قلنا « X has Z » فان هذا التعبير إنما هو دالة قضية تعتبر فيها (x) مكون أساسى غير محدد undetermined ، وهنا فإنه ينظر إليها على أنها متغير .

وفكرة رسل عن المكون غير المحدد تعتبر من الأفكار الدقيقة التى يمكن من خلالها تفسير بعض المفاهيم المنطقيه مثل : « كل شىء » everything ، « شىء ما » something ، « لا شى » nothing ؛ من حيث أصبحت عبارات دالة [3] . ومعنى هـذا أن هذه المفاهيم أصبحت من قبيل الرموز الناقصة لأنه ليست لها معنى بمعزل عن بقية أجزاء القضية . فجوهر العبارات الدالة يتمثل العبارة الدالة ليست بذات معنى فى حـد ذاتها ، بل أن كل قضية من القضايا تكتسب معناها من خلال التعبير اللفظى المتكامل والذى يضفى على القضية معناها .

---

(1) Russell, B., On Denoting, P. 41
(2) weits, M., op - cit. P. 95
(3) Russell, B., On Denoting, P. 42

فاذا قلنا « قابلت رجلا ما » « I met a man » ، فان تحليل هذه العبارة وفقا لرأى رسل وفكرته عن دالة القضية والمتغير ، يصبح :

« دالة القضيـــة « قابلت x وأن x أنسان » ليست كاذبة دائما » .

لـكن ما هو تحليل رسل للقضايا من النوع « المربع الدائرى » أو « الملك الحالى لفرنسا » أو « الجبل الذهبي » . ما هو تحليله لصورة هذه القضايا من حيث الصدق والمعنى ؟

إكتشف رسل التناقض الذى إنتهى اليه « مينونج » فى نظريته بعد تحليل دقيق للعبارات الدالة . فبينما زعم ميونج أنه يمكننا أن تتصور الشىء الذى هو «مربع» ودائرى فى نفس الوقت . أكد رسل أن تقرير مينونج على هذا النحو يعد خروجا على قانون عدم التناقض ، لأنه كيف يمكن لنا أن نثبت وجود « المربع الدائرى » والواقع ينكر هذا تماما ؟

من هنا وجدنا رسل يقدم لنا فكرته عن الأوصاف المحدده حتى لا يقع فى التناقض الذى وقع فيه مينونج . ويتضح لنا فحـــوى هذه النظرية إذا ما نظرنا فى صورة المثال التالى :

« مؤلف ويفرلى » The author of waverley

« مؤلف ويفرلى » هنا ليست إسم علم ، بل رمز ناقص ، وقد اعتبرها رسل رمز ناقص لثلاثة أسباب :

(١) أنها رمز مركب ، لأنها لا تشير إلى جزئى متحقق فى الخارج .

(٢) ان معناها يتحدد ، مباشرة عبارة بمجرد معرفتنا لمعانى الكلمات كالتي

تتألف منها العبارة (١) . بينما إسم العلم لا يتحدد بمعـــانى الكلمات ، بل بمعرفتنا للشخص أو الفرد الذى ينطبق عليه الإسم . (٢)

(٣) أنه إذا ما كانت هذه العبارة اسم علم ، فانهـا ستصبح « سكوت Scott كان* مؤلف ويفرلى ، إما أنها قضيه تحصيل حاصل أو كاذبة ومن ثم فانه إذا كانت « مؤلف ويفرلى » إسم علم ، فانه يمكن لنا أن نضع بدلا منها اسم العلم « سكوت » وتصبح قضيتنا على الصورة :

« سكوت كان سكوت »   « Scott was scott »

أما إذا كان إسم العلم هو اسم آخر بخلاف «سكوت » فان القضية ستصبح كاذبة وما يجعلنا نذهب الى القـول بأن العبارات الوصفيـة هى رموز ناقصة ، فان ذلك يتمثل فى أن ما تشير اليه العبـــارات الوصفية لا يعد من مكـونات القضية (٣) ، لانه ليس هناك كائن فعلى موجود فى الخارج يمكن أن نعتبره بمثابة معنى للعبارة الدالة ، ولأنه لايوجد من بين مكونات القضية ما يقـــابل هذا الوصف .

وما هو أساسى بالنسبة لتحليل الأوصاف المحدده ، هو أنها فى عملية التحليل لا تتكون من الأوصاف ذاتها ، بل من القضايا التى ترد فيها . وأفضل طريقـــة لتحليل القضايا من هذا النوع هو أن ننظر فى المناسبات التى تجعل الوصف كاذب.

---

(١) ويتضح لنا ذلك بصورة أكثر وضوحا فى اللغة الانجليزية ، فالمقصود بمعانى الكلمات التى تتألف منها العبارة هى الكلمات the - author -of- waverley بينما فى اللغة العربية نجد لدينا لفظتان فقط هما مؤلف ـ ويفرلى .

(2) Russell, B., P. L. Atomism, Lecture VI

(3) Ibid

(*) وضعنا الكلمة على هذا النحو لتتفق مع صورتها النحوية فى اللغة الانجليزية .

فإذا ما نظرنا للقضية « سكوت كان مؤلف ويفرلى » لوجدنا أن هذه القضية تكون كاذبة فى حالات ثلاثة فقط هى : ـ

الحالة الاولى: إذا لم تكن قصة ويفرلى كتبت فعلا .

الحالة الثانية : إذا كان هناك أشخاص كثيرين كتبوا ويفرلى .

الحالة الثالثة : إذا لم يكون « سكوت » هو الذى كتب ويفرلى .

ونفى شروط الكذب فى هذه الحالات الثلاث يكون على النحو التالى : ـ

الحالة الاولى : « X كتب ويفرلى » ليست كاذبة دائما . أى أنه يوجد على الأقل فرد واحد كتب ويفرلى

الحالة الثانية : « اذا كان X ، y كتبا ويفرلى ، فإن X ، y يسكونان متطابقان . أى على الأكثر هناك فرد واحد كتب ويفرلى .

الحالة الثالثة : « اذا كان X قد كتب ويفرلى ، فإن X كان سكوت » صادقة دائما .

ومن ثم فإن القضايا الثلاث معا تقرر أن

« X كتب ويفرلى » تكافىء دائما « X كان سكوت » .

وهناك مثال أخرى قدمه رسل للعبارات الدالة التى تنطوى وفق تحليل مينونج على الخروج الصريح على قانونى عدم التناقض والثالث المرفوع . فالقضية التى تقرر أن « الملك الحالى لفرنسا أصلع » The present King of France is blad إذا ما نظرنا إليها من وجهة النظر التحليليه الدقيقة ، لقلنا أنه من المعروف أنه ليس هناك فى فرنسا ملوك الآن . ومن ثم ينشأ لدينا تساؤل هام : هل تكون هذة العبارة صادقة أم كاذبة ؟ انه إذا ما افترضنا كذب هذة العبارة ، فانه وفقا لقانون الثالث المرفوع يكون التقرير assertion بأن « الملك الحالي لفرنسا ليس

أصلع » The present king of France is not blad ، تقريرا صادقا . لكن تقريرنا بأن الملك الحالى لفرنسا له رأس ذات شعر يصبح تقريراً كاذباً كتقريرنا أن « الملك الحالى لفرنسا أصلع » . لكنه يتضح لنا أن القضيتان « الملك الحالى لفرنسا أصلع » ، « الملك الحالى لفرنسا ليس أصلع » تخـــالفان قانون الثالث المرفوع فضلا عن أن إفتراض صدقهما معا يعد خروجا على قانون عدم التناقض .

ومن ثم فإنه لغرض المنطق ، ولعدم الإخلال بقوانينه وجدنا رسل ينظر للعبارات التى صورتها « الكذا والكذا » ، وبصفة عـــامة كل وصف له هـذه الصورة ، لا على أنها صادقة أو كاذبة ، بل إنها فى جوهرها « بلامعنى » meaningless . وهذا هو ما جعله يتمكن من حل المشكلة الأساسية للاوصاف عن طريق إستخدام الدوال الوصفية descripative Functions من حيث أنها تسمح لنا بأن نتحدث عن الاشياء التى لانتصل بها اتصالا مباشرا[1]. واستخدامنا لفكرة الدوال هنـــا هو مايسميه رســـل « بالتعريف فى الإستعمال » [2] definition in use للوصف .

---

(1) Russell, B., The problems of philosophy, P. 92

(2) Principia, V. I, P. 66

التعريفات الأساسيه (١)

$$14.01\ [(\iota x)\ (\phi x)]\ .\ \psi\ (\iota x)\ (\phi x)\ .\ = :\ (\exists b) : \phi x\ .\ \equiv_x .\ x = b : \psi b$$

$$14.02\ E\ !\ (\iota x)\ (\phi x)\ .\ = :\ (\exists b) : \phi x\ .\ \equiv_x .\ x = b$$

$$14.03\ [(\iota x)\ (\phi x), (\iota x)\ (\psi x)]\ .\ f\{(\iota x)\ (\phi x), (\iota x)\ (\psi x)\}\ .\ = :$$

$$[(\iota x)\ (\phi x)] : [(\iota x)\ (\psi x)]\ .\ f\{(\iota x)\ (\phi x), (\iota x)\ (\psi x)\}$$

$$14.04\ [(\iota x)\ (\psi x)]\ .\ f\{(\iota x)\ (\phi x), (\iota x)\ (\psi x)\}\ .\ = .$$

$$[(\iota x)\ (\psi x), (\iota x)\ (\phi x)]\ .\ f\{(\iota x)\ (\phi x), (\iota x)\ (\psi x)\}$$

نماذج البراهين

برهن على صدق القضية رقم (١٤ر١١١) والتي تنص على أن

$$[(\iota x)\ (\psi x)]\ .\ f\{(\iota x)\ (\phi x), (\iota x)\ (\psi x)\}\ .\ \equiv :\ (\exists b, C) : \phi x\ .$$

$$\equiv_x .\ x = b : \psi x\ .\ \equiv_x .\ x = C : f(b,C)$$

---

(١) وجدنا أنه من الأفضل الابقاء على النقط بدلا من الأقواس ، لان الأقواس فى قضايا الأوصاف كثيرة ، وحتى لا تختلط مجالات الأقواس بعضها بفضل إستخدام النقط .

البرهان

تنص القضية رقم (٤ر٢) على أن

$$p \equiv p \qquad (1)$$

كما وتنص القضية رقم (١٤٠٤ر) على أن

$$[(\iota x)(\psi x)] : f\{(\iota x)(\phi x), (\iota x)(\psi x)\} . = . [(\iota x)(\psi x), (\iota x)(\phi x)]$$

$$f\{(\iota x)(\phi x), (\iota x)(\psi x)\} \qquad (2)$$

وتنص القضية رقم (١٤٠٣ر) على أن

$$[(\iota x)(\phi x), (\iota x)(\psi x)] . f\{(\iota x)(\phi x), (\iota x)\,\psi x\} . = :$$

$$[(\iota x)(\phi x)] : [(\iota x)(\psi x)] . f\{(\iota x)(\phi x), (\iota x)(\psi x)\} \qquad (3)$$

(١) ، (٢) ، (٣) تتضمن أن

$$[(\iota x)(\psi x)] . f\{(\iota x)(\phi x), (\iota x)(\psi x)\} . \equiv : . [(\iota x)(\psi x)] :$$

$$[(\iota x)(\phi x)] . f\{(\iota x)(\phi x), (\iota x)(\psi x)\}$$

والقضية رقم (١٤ر١) والتي تنص على أن

[illegible] $(\phi x)] . \psi(\iota x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b$

تكافئ

$$[(\imath x)(\psi x)] :. (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : f \{ b, (\imath x)(\psi x) \}$$

ومنه القضية تكافئ أيضا أن

$$(\exists c) :. \psi x \equiv_x . x = C :. (\exists b) :. \phi x . \equiv_x x = b : f (b, c)$$

، والقضية رقم (١١ر٥٥) والتي تنص على أن

$$(\exists x, y) . \phi x . \psi (x,y) . \equiv : (\exists x) : \phi x : (\exists y) . \psi (x,y)$$

تكافئ

$$(\exists b, c) : \phi x . \equiv_x . x = x C : \psi x . \equiv_x . x = b : f (b, c)$$

، الطرف الأيمن يكافئ الطرف الأيسر وهذا يتضمن أن القضية رقم (١١ر١٤) قضية صادقة ،

ه . ط . ث .

برهن على صدق القضية رقم (١٢ر١٤) والتي تنص على أن

$$E ! (\imath x)(\phi x) . \supset : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . \quad y$$

البرهان

تنص القضية رقم (١٤ر١) على أن

$$E ! (\imath x) (\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$$

وهذه القضية تتضمن فرضا أن

$$(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b \qquad (١)$$

والقضية (٣٨ر٤) تنص على أن

$$P \equiv r . q \equiv S . \supset : p.q \equiv \qquad (٢)$$

والقضيه رقم (١٠ر١) تقرر أن

$$(x) \quad \phi \quad . \supset \phi y$$

والقضيه رقم (٣ر١١) تنص على أن

$$\vdash . (x , y) . \phi (x , y) : \equiv : (x,y) : p . \supset . \phi (x,y) \qquad (٤)$$

من ٢ ، ٣ ، ٤ ، القضيه (١١ر١١) تتضمن أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x . \phi y . \equiv_{x,y} . x = b . y = b$$

وصورة القضية رقم (١٧٢ر١٣) والتي تنص على أن

$$y = x . z = x . \supset . y = z$$

تتضمن أن

$$\supset_{x,y} . x = y \qquad (٥)$$

∴ من رقم (٥) & القضية (١١ر١٠) & القضية (٢٣ر١٠) والتي تنص على أن

$$(x) . \phi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p$$

ينتج أن

$$(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x . \phi y . \supset_{xy} . x = y \qquad (٦)$$

من (١) & (٦) يتضح لنا أن الطرف الأيمن من القضية (١٢ر١٤) يتضمن الطرف الأيسر.

هـ . ط . ث .

برهن على صدق القضية رقم (١٢١ر١٤) والتي تنص على أن

$$\phi x . \equiv_x . \quad = b : \phi x . \equiv_x . x = C : \supset . b = e$$

البرهان

القضية (١ر١٠) والتي تنص على أن

$$(x) . \phi x . \supset . \phi y$$

تتضمن فرضنا أن

$$\phi b . \equiv . b = b : \phi b . \equiv . b = e$$

والقضية رقم (١٥ر١٣) والتى تنص على أن

(٢) $x = x$

تتضمن أن

$$\phi b : \phi b . \equiv . b = c$$

∴ من صورة قانون الترابط ومن (١) ، (٢) ينتج أن

$$b = c$$

وهذا يتضمن الطرف الأيمن من القضية

هـ . ط . ث

برهن على صدق القضية رقم (٢٢ر١٤) والتى تنص على أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b : \equiv$$

$$: \phi x . \supset_x . x = b : (\exists x) . \phi x$$

البرهان

القضية رقم (٢٢ر١٠) تنص على أن

$$(x) . \phi x . \psi x . \equiv : (x) . \phi x : (x) . \psi x$$

تتضمن أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : x = b . \supset x . \phi x \quad (١)$$

والقضية رقم (١٩١ر١٣) من قضايا الذاتيه تؤكد أن

$$y = x . \supset y . \phi y : \equiv . \phi x$$

بتطبيق هذه الصورة على رقم (١) ينتج أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b \quad (٢)$$

والقضية رقم (٧١ر٤) تنص على أن

$$p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q$$

تتضمن أن

$$\phi x . \supset . x = b : \quad : \phi x . \equiv . \phi x . x = b$$

والقضية (٢٧ر١٠) تقرر أن

$$(z) . \phi z \supset \psi z . \supset : (z) . \phi z . \supset . (z) . \psi z$$

∴ من القضية (١١ر١٠) & القضية (٢٧ر١٠) ينتج أن

$$\phi x . \supset_x . x = b : \supset : \phi x . \equiv_x . \phi x . x = b$$

$$\supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \phi x . x = b$$

$$\equiv . \phi b \quad (٣)$$

وذلك باستخدام كل من القضية رقم (٢٨١ر١٠) & القضية رقم (١٩٥ر١٣)

∴ من (٣) & القضية رقم (٣٢ر٥) والتي تقرر أن

$$p . \supset . q \equiv r : \equiv : p . q . \equiv . p . r$$

ينتج أن

$$\phi x . \;_{x} . x = b : (\exists x) . \phi x : \equiv : \phi x . \supset_{x} .$$

$$x = b : \phi b \text{ ———————— } (٤)$$

∴ من رقم (٢) & (٤) ينتج أن الطرفان متساويان

هـ. ط. ث.

برهن على صدق القضية رقم (٢٣ر١٤) والتي تقرر أن

$$\phi (z, \omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y :$$

$$\equiv : \phi (z, \omega) . \supset_{z,\omega} . z = x : \omega = y : \phi (x, y) :$$

$$\equiv : \phi (z, \omega) . \supset_{z,\omega} . z = x \cdot \omega = y : (\exists z, \omega) . \phi (z, \omega)$$

البـــرهان

تقرر القضية رقم (٣١ر١١) أن

$$(x,y) . \phi (x,y) : (x,y) . \psi (x,y) : \equiv : (x,y) : \phi (x,y) . \psi (x,y)$$

وهذه القضية تتضمن أن

$$\phi (z,\omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y$$

وتكافىء أن

$$\phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : z = x . \omega = y . \supset_{z,\omega} . \phi (z,\omega) \quad \text{———} \quad (١)$$

وصورة القضية رقم (١٣ر٢١) والتى تنص على أن

$$z = x . \omega = y . \supset_{z,\omega} . \phi (z,\omega) : \equiv : \phi (x,y)$$

بتطبيق هذه الصوره على رقم (١) نجد أنها تكافىء أن

$$\phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \phi (x,y) \quad \text{———} (٢)$$

والقضية رقم (٤ر٧١) والتى تقرر أن

$$p \supset q . \equiv : p . \equiv . \quad q$$

تتضمن أن

$$\phi (z,\omega) . \supset z = x . \omega = y : \supset : \phi (z,\omega) . \equiv . \phi (z,\omega) . z = x . \omega = y$$

ومن القضية رقم (١١ر١١) و (٣٢ر١١) التي تقرر أن

$$(x,y) : \phi (x,y) . \supset . \psi (x,y) : \supset : (x,y) . \phi (x,y) . \supset . (x,y) . \psi (x,y)$$

ينتج أن

$$\phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \supset : \phi (z,\omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \supset : (\exists z,\omega) . \phi (z,\omega) . \equiv . (\exists z,\omega) . \phi (z,\omega) . z = x . \omega = y . \equiv . \phi (x,y) \qquad (3)$$

وذلك بتطبق صوره القضيه رقم (٤١ر٣٢ر١١) و (١٢,٢٢)

.·. من (٢) و القضية رقم (٣٢ر٥) ينتج أن

$$\phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : (\exists z,\omega) . \phi (z,\omega) : \equiv : \phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \phi (x,y) \qquad (4)$$

.·. من (٢) و (٤) ينتج أن القضية صادقة ،

هـ . ط . ث

برهن على صورة القضية رقم (١٢٤ر١٤) والتى تقرر أن

$$(\exists x,y) : \phi (z,\omega) \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y . \equiv :$$
$$(\exists x,y) . \phi (x,y) : \phi (z,\omega) . \phi (u,v) . \supset_{z,\omega,u,v} .$$
$$z = u . \omega = v$$

البرهان

تنص القضية رقم (٢٧ر٣) على أن

$$p . q \supset q \text{ ———————— } (١)$$

من (١) & القضية (١٢٣ر١٤) السابق البرهنة عليها ينتج أن

$$(\exists x,y) : \phi (z,\omega) . \equiv_{z,\omega} .z = x .\omega = y : \supset . (\exists x,y) .$$
$$\phi (x,y) \text{ ———————— } (٢)$$

، ∵ القضية رقم (١ر١١) تنص على أن

$$(x,y) . \phi (x,y) . \supset . \phi (z,\omega)$$

، القضية رقم (٤٧ر٣) تقرر أن

$$p \supset r . q \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s .$$

∴ من القضية (١ر١١) & (٤٧ر٣) ينتج أن

$$\phi(z,\omega) :\equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \supset : \phi(z,\omega) . \phi(u,v) .$$
$$\supset . z = x . \omega = y . u = x . v = y. \quad \text{———— (٣)}$$

ومن صورة القضية رقم (١٧٢ر١٣) والتي تقرر أن

$$y = x . z = x . \supset . y = z$$

وتطبيق هذه الصورة على رقم (٣) ينتج أن

$$z = u . \omega = v \quad \text{———— ()}$$

من رقم (٤) وصورة القضية رقم (١١ر١١) لا صورة القضية رقم (٣٥ر٢١) ينتج أن

$$(\exists x,y) ; \phi(z,\omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y ;$$
$$\supset ; \phi(z,\omega) . \phi(u,v) . \supset . z = u . \omega = v \quad \text{———— (٥)}$$

من رقم (٣) ، القضية (١١ر١١) ، القضية (٣ر١١) ينتج أن

$$(\exists x,y) ; \phi(z,\omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y ;$$

$$\supset : \phi(z,\omega) . \phi(u,v) . \supset_{z,\omega,u,v} . z = u . \omega = v$$

وبتطبيق صورة القضية رقم (١ر١١) ينتج أن

$$\phi(x,y) : \phi(z,\omega) . \phi(u,v) . \supset_{z,\omega,u,v} . z = u . \omega = v :$$
$$\supset : \phi(x,y) : \phi(z,\omega) . \phi(x,y) . \supset_{z,\omega} . z = x .$$
$$\omega = y : \supset : \phi(x,y) : \phi(z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x .$$
$$\omega = y : \supset : \phi(z,\omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y \quad (٧)$$

وذلك باستخدام القضية رقم (٣٣ر٥) & القضية رقم (١٢٣ر١٤)

ومن القضية رقم (٣٤ر١١) والتى تقرر أن

$$(x,y) : \phi(x,y) . \equiv . \psi(x,y) : \supset : (\exists x,y) . \phi(x,y) . \equiv :$$
$$(\exists x,y) . \psi(x,y)$$

والقضية رقم (٤٥ر١١) والتى تنص على أن

$$(\exists x,y) : p . \phi(x,y) : \equiv : p : (\exists x,y) . \phi(x,y)$$

ومن القضية رقم (١١ر١١) & ومن رقم (٧) ينتج أن

$$(\exists x,y) . \phi(x,y) : \phi(z,\omega) . \phi(u,v) . \supset_{z,\omega,u,v} . z = u .$$
$$\omega = v : \supset : (\exists x,y) : \phi(z,\omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y \quad (٨)$$

∴ من (٢) & (٦) وينتج أن القضية رقم (١٢٤ر١٤) قضيه صادقه

هـ. ط. ث

برهن على صورة القضية رقم (١٣ر١٤) والتي تقرر أن

$$a = (\imath x)(\phi x) . \equiv . (\imath x)(\phi x) = a$$

البرهان

القضية رقم (١ر١٤) تقرر أن

$$[(\imath x)(\phi x)] . \psi (\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \psi b$$

هذه القضية تتضمن أن

$$a = (\imath x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : a = b \quad (\;)$$

والقضية رقم (١٦ر١٣) تقرر أن

$$x = y . \equiv . y = x \text{ ——————— } (٢)$$

والقضية رقم (٣٦ر٤) تقرر أن

$$p \equiv q . \supset : p . r . \equiv . q . r \text{ ——— } (٣)$$

∴ (٢) و (٣) معا يتضمنان أن

$$\phi x . \equiv_x . x = b : a = b : \equiv : \phi x . \equiv_x . x = b : b = a$$

∵ القضية (٢٨١ر١٠) تقرر أن

$$(x) . \phi x \equiv \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x) . \psi x$$

∴ من القضية (١٠ر٢٨١) & القضية (١٠ر١١) ينتج أن

$$(\exists b) ; \phi x . \equiv_x \cdot x = b : a = b$$

$$\equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b ; b = a :$$

$$\equiv : (\imath x) (\phi x) = a \qquad (٤)$$

وذلك بتطبيق صورة القضية رقم (١٤ر١)

∴ (١) & (٤) يتضمنان معا صدق القضية الأصلية

المطلوب البرهنه عليها .

هـ . ط . ت

برهن على صورة القضية رقم (١٤ر١١٤) والتى تقرر أن

$$(\imath x) (\phi x) = (\imath x) (\psi x) . (\imath x) (\psi x) = (\imath x) (Xx) \cdot \supset .$$

$$(\imath x) (\phi x) = (\imath x) (Xx)$$

البرهـــان

القضية رقم (١٤ر١١١) والتى سبق البرهنة عليها تتضمن أن

$$(Ea,b) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = b : a = b : .$$

$$(\exists c \cdot d) : \psi x . \equiv_x . x = C : X x . \equiv_x . x = d : C = d : .$$

والقضية رقم (١٣ر١٩٥) والتي تقرر أن

$$(\exists y) \,.\, y = x \,.\, \phi y \,.\, \equiv \,.\, \phi x$$

تتضمن أن

$$(\exists a) : \phi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = a : \psi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = a \quad :.$$

$$(\exists C) : \psi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = C : Xx \,.\, \equiv_x \,.\, x = C \quad :.$$

والقضية رقم (١١ر٥٤) تتضمن أن

$$(\exists a, C) : \phi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = a : \psi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = a :$$

$$\psi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = C : Xx \,.\, \equiv_x \,.\, x = C \quad :.$$

والقضيتان (١٤ر١٢١) و (١١ر٤٢) تتضمنان معاً أن

$$(\exists a, C) : \phi x \,.\, \equiv_x \,.\, x = a : Xx \,.\, \equiv_x \,.\, x = C : a = C :.$$

$$\supset :. (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(Xx)$$

وذلك باستخدام القضية رقم (١٤ر١١١) وهذا يتضمن أن القضية الأساسية قضية صادقة

هـ. ط. ث

نصوص مختـــارة

The Development of Symbolic Logic

The origins of modern Symbolic logic may be traced back to the Contributions of the great German mathematician and philosopher of the Seventeenth Century, G. W. Von Leibniz (1646 - 1716). A precocious genius, leibniz published before the age of twenty the *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Although not the first attempt at a Symbolic logic-for leibniz knew of the work of Roman Lull in the early fourteenth Century, as examplified in the *Ars Major* - it is still the first great modern Suggestion for a reform of the traditional logic in the direction of Symbolic or mathematical logic . In the *Dissertatio* Leibniz Proposed a twofold reform : (1) the establishment of a Universal Scientific Language to Facilitate Communication among seientists, and (2) the establishment of a Universal Calculus of reasoning to expedite logical analysis and the solution of logical problems by the Kind of precise analysis that is now possible in present - day symbolic logic. Actually, the second aspect of Leibnis's Suggested program was the more important of the two and definitely anticipated the development of modern logic. Unfortunately, his contributions were fragmentary and never really developed. At the least, however, it may be said that he anticipated the modern formulation of Symbolic logic.

Two more centuries were to elapse before the next significant contributions to symbolic logic. George Boole (1815 - 1864) may be regarded as the second founder of symbolic logic, although his work was preceded by some significant contributions on the part of *S R William Hamilton* (1788 - 1856) and *Augustus*

DeMorgan (1806 - 1871) . Hamilton actually contributed little to the development of Symbolic logic itself, but, his quantification of the predicate and his enthusiasm for logic ingeneral brought about a significant revival of the study in England . De Morgan undoubtedly possessed one of the great logical minds of the time. His numerous investigations into many aspects of logic, and more particularly his study of the logic of relations, represented a significant and pronounced advance over the traditional logic and its principles .

Actually, Boole was the logician to apply mathematics in such a way as to work out a practicable calculus of logic. Using such mathematical operations as addition and multiplication, and allowing variables to stand for classes, he developed an algebra of classes for the solution of the problems of class relationships which had formerly been considered only within the context of the classical syllogism. Booles principal works are *The Mathematical Analysis of logic* (1847) and *An Investigation of the laws of Thought* (1854) .

The principal successors of Boole were *W. S. Jevons* (1835-1882), *John venn* (1834 - 1923), and *Charles S. Peirce* (1839-1914), each of whom modified the Boolean algebra and made other contributions. of these men, the most outstanding in undoubtedly the American logician *Perice* whose genius was little known or appreciated until his collected works were published in the 1930's .

Peirce moved far beyond the traditional or Aristotelian logic. Defining logic as a "theory of signs" he elaborated further upon

the Boolean algebra of logic, enlarged upon the logic of relations as developed by De Morgan, and emphasized the importance of whate he termed the "illative relation" (Known later as 'material implication) as fundamental to the unity of logic.

Peirce's investigations also influenced the work of the German logician *E. Schröder* and led to the development of what came to be known as the *Boole Schröder* algebra of logic, paticularly as it was brought out in Schroder's *Vorlesungen über die Algebra logik* (1890 - 1905).

In the meantime, the mathematicians undr the leadership of G. Peano (1858 - 1932) and his School endeavorced in the *Formulaire de mathematiques* to establish certain proofs by means of whish they hoped to show that mathematics was ultimately reducible to logic. In doing this they gave mathematics a "logistics" form by using the notation of symbolic logic to represent the relations of a mathematical system and to show thereby the rigorous and deductive nature of mathematics. *G. Frege* (1848-1925) was making similar Contributions but unfortunately his work did not become known until rediscovered in our own time by Russell. The more significant publications of Frege are the *Grundlagen der Arithmetik* (1884) and the *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 - 1903).

The great Synthesis of the more important contributions of their predecessors and particularly of the logistic thesis that mathematics is reducible to logic was attained by Bertrand Russell (1872) [1] and A. N. whitehead (1861 - 1647) with the publication of their justly famous *Principia Mathematica* (1910).

Mourant, J., Formal Logic, N. Y , 1963, pp, 214-216.

(١) توفى رسل فى عام ١٩٧٠.

Mathematics and Logic

Mathematics and logic, historically speaking, have been entirely destinct studies. Mathematics has bee connected with Science, logic with Greek. But both have developed in modern times : Logic has become more mathematical and mathematics has become more logical. The Consequnce is that it has now hecome wholly imposeible to draw a line between the two; in fact, the two are one. They differ as boy and man : logic is the youth of mathematics and mathematics is the manhood of logic. This view is pesented by logicians who, having spent their time in the study of classical texts, are incapable of follwing a piece of symbolic reasoning, and by mathematicians who have learnt a technique without troubling to inquire into its meaning or justification. Both types are now fortunately growing rare. So much of modern mathematical work is obviously on the border-line of logie, so much of modern logic is symbolic and formal, that the very close relationship of logic and mathematics has become obvious to every instructed student. The proof of their identity is, of course, a matter of detail : Starting with premisses which would be universally admitted to belong to logic, and arriving by deduction at results which as obviously belong to mathematics, we find that there is no point at which a sharp line can be drawn, with logic to left and mathematics to the right. If there are still those who do not admit the identity of logic and mathematics, we may challange them to indicate at what point, in the succeesive definitions and deductions of *Principia Mathematica*, they consider that logic ends and mathematics begins It will then be obvious that any answer must be quite arbitrary.

Russell, B., Introduction to Mathematical Philosoph, pp. 194 - 195.

Variables

The idea of a variable, as it occurs in the present work, is more general than that which is explicitly used in ordinary mathematics. In ordinary mathematics, a variable generally stands for an undetermined number or quantity. In mathematical logic, any symbole whose meaning is not determinate is called a *variable* and the various determinations of which its meaning is susceptible are called the *values* of the variables may be any set of entities, propositions, functions, classes or relations, according to circumstances. If a statement is made about "Mr A and Mr B", "Mr. A" and "Mr. B" are variables whose values are confined to men. A variable may either have a conventionally - assigned range of values, or may (in the absence of any indication of the range of values) have as the range of its values all determinations which render the statement in which it occurs significant. Thus when a text-book of logic asserts that "A is A", without any indication as to what A may be, what is meant is that *any* statement of the form "A is A" is true. we may call a variable *restricted* when its values are confined to some only of those of which it is capable; otherwise, we shall call it *unrestricted*. Thus when an unrestricted variabls occurs, it represents any object such that the statement concerned can be made significantly (i. e. either truly or falsely) concerning that object. For the purpose of logic, the unrestricted variable is more convenient than the restricted variable, and we shall always employ it. We shall find that the unrestricted variable is still subject to limitations imposed by the manner of its occurrence, i.e. things which can be said significantly concerning a proposition cannot be said significantly concerning a class or a relation, and so on. But the limitations to which the unres-

tricted variable is subject do not need to be explicitly indicated since they are the limits of significance of the statement in which the variable occurs, and are therefore intrinsically determined by this statement . . .

To sume up, the three salient facts connected with the use of the variable are : (1) that a variable is ambiguous in its denotation and accordingly undefined; (2) that a variable preserves a recognizable identity in various occurrences throughout the same context, so that many variables can occur together in the same context each with its separate identity , and (3) that either the range of possible determination of two variables mays be the same, so that a possible determination of on variable i also a possible determination of the other, or the range of two variables may be different, so that, if a possible determination of one variable is given to the other, the resulting complete phrase is meaningless instead of becoming a complete unambiguous proposition (true or false) as would be the case if all variables in it had been given *suitable* determinations.

Whitehead & Russell., Principia Mathematica, volume 1, pp. 4 - 5, N. Y., 1970.

Proositional Functions

We mean by a 'proposition' primarily a form of words which expresses what is either true or false. I say 'primarily' because I do not wish to exclude other than verbal symbols, or even mere thoughts if they have a symbolic character. But I think the word 'proposition' should be limited to what may, in some sense, be called 'symbols', and further to such symbols as give expression to truth and falsehood. Thus "two and two are four" and "two and two are five" will be propositions, and so will "Socrates is a man" and "Socrates is not a man" . . . . A 'propositional function', in fact, is an expression containing one or more undetermined constituents, such that, when values are assigned to these constituents, the expression becomes a proposition. In other words, it is a function whose values are propositions. But this latter definition must be used with caution. A descriptive function, e. g. "the hardest proposition in A's mathematical treatise", will not be a proposition, although its values are propositions. But in such a case the propositions are only described: in a propositional function, the values must actually *enunciate* propositions. . . .

We do not need to ask, or attempt to answer, the question: "what *is* a propositional function?" A propositional function standing all alone may be taken to be a mere schema, a mere shell, an empty receptacle for meaning, not something already significant. We are concerned with propositional functions, broadly speaking, in two ways: first, as involved the notions "true in all cases" and "true in some cases"; secondly, as involved in the theory of classes and relations. . . .

When we say that something is "always true" or "true in all case", it is clear that the "something" involved cannot be a proposition. A proposition is just true or false, and there is an end of the matter. There is no instances or cases of "socrates is aman" or "Napoleon deid at St. Helana", These are propositions, and it would be meaningless to speak of their being true "in all cases". This phrase is only applicable to propositional *functions*. . , .

Sentences involving such words as "all", "every" "a", "the" "some" require propositional functions for their interpretation. The way in which propositional functions occur can be explained by means of two of the above words, namely, "all" and "some".

There are, in the last analysis, only two things that can be done with a propositional function : one is to assert that it is true in *all* cases, the other to assert that is true in at least one case, or in *some* cases (as we shall say, assuming that there is to be no necessary implication of a plurality of cases). All the other uses of propositional function is true "in all cases", or "always" (as we shall also say, without any temporal suggestion), we mean that all its values are true. If "ϕx" is the function, and *a* is the right sort of object to be an argument to "ϕx", then ϕa is to be tru , however *a* may have been chosen. For example, "if *a* is human, *a* is mortal" is true whether *a* is human or not ; in fact, every proposition of this form is true. Thus the propositional function "if x is human, x is mortal", is "always true" or "true in all case."

Russell, B., Introduction to Mathematical philosophy, London, 1953, pp. 155 - 158.

Descriptions

By an "incomplete" symbole we mean a symbole which is not supposed to have any meaning in isolation, but is only defined in certain contexts. In ordinary mathematics, for example, $\frac{d}{dx}$ and $\int_a^b$ are incomplet symbols : Something has to be supplied before we have anything significant, Such symbols have what may be called a "definition in use". Thus if we put

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ Df$$

we define the use of Δ^2, but Δ^2, by itself remains without meaning. This distinguishes such symbols from what (in a generalized sense we may call *Proper names* : "Socrates", for example, stands for a certain man, and therefore has a meaning by itself, without the need of any context. If we supple a context, as in "Socrates is mortal", these words express a fact of which Socrates himself is a constituent : there is a certain object, nemely Socrates, which does have the property of mortality. and this object is a constituent of the complex fact which we assert when we say "Socrates is mortol". But in other cases, this simple analysis fails us . Suppose we say : " The round squire does not exist". It seems plain that this is a true proposition, yet we cannot regarde it as denying the existence of a certain object called "the round square". For if there were such an object, it would exist : we cannot first assume that there is a certain object, and then proceed to deny that there is such an object. Whenever the grammatical subject of a proposition can be supposed not to exist without rendering the proposition meaningless, it is plain that the

grammatical subject is not a proper name i.e. not a nam directly representing some object. Thus in all such cases, the proposition must be capable of being so analysed that what was the grammatical subject shall have disappeared. Thus when we say "the round square does does not exist", we may, as a first attempt at such analysis, substitute "it is false that there is an object x which is both round and square". Generally, when "the so - and - so" is said not to exist, we have a proposition of the form

$$\text{"} \sim E ! (\iota x) (\phi x) \text{"}$$

i.e. $$\sim \{ (\exists C) : \phi x . \equiv_x . x = C \}$$

or some equivalent. Here the apparent grammatical subjeot (ιx) (ϕx) has Completely disappeared; thus in "$\sim E ! (\iota x) (\phi x)$", (ιx) (ϕx) is an *incomplete* symbole.

By an extension of the above argument, it can easily be shown that (ιx) (ϕx) is *always* an incomplete symbole. Take, for example, the following proposition: "Scott is the author of waverley". [Here "the author of waverley" is (ιx) (x wrote waverley)]. This proposition expresses an identity; thus if "the author of waverley" could be taken as a proper name, and supposed to stand for some object C, the propositien be "Scott is C" But if C is any one except Seott, this proposition is false; while if C is Scott, the proposition is "Scott is Scott", which is trivial. and plainly different from "Scott is the author of waverley". Generalizing, we see that the proposition

$$a = (\iota x) (\phi x)$$

is one which may be true or may be false, but is never merely trivial, lik $a = a$; whereas, If (ιx) (ϕx) were a proper name, $a = (\iota x)$ (ϕx) would necessarily be either false or the same as the trivial proposition $a = a$. We may express this by saying that $a = (\iota x)$ (ϕx) is not a value of the propssitional function $a = y$ from which it follows that (ιx) (ϕx) is not a value of y. But since y may be anything, it follows that (ιx) (ϕx) is nothing. Hence, Since in use it has meaning, it must be an incomplete Symbol.

It might be suggested that "Scott is the author of waverley" asserts that "Scott" and "author of waverley" are two names for the same object. But a little reflection will show that this would be a mistake. For if that were the meaning of "Scott is the author of waverley", what what would be required for its truth would be that Scott Should have been Called the author of waverly : if he had been so called, the proposition would be true, even if some one else had written waverley ; while if no one called him so the proposition would be false, even if he had written waverley. But in fact he was the auther of waverley at a time when no one called him so, and he would not have been the author if every one had called him so but some one else had written waverly. Thus the proposition "Scott is the author of waverley" is not a proposition about names, like 'Napoleon is Bonaparte'; and this illustrates the sense in which "the author oe Waverley" differs from a true proper name.

The all phrases (other than propositions) Containing the word *the* (in the singular) are incomplete Symboles : they have a meaning in use, but not in isolation. For "the author of waverley" Cannot mean the same as "Scott" or "Scott is the author of

waverley" would mean the same as "Scott is Scott" which it plainly does not; nor can "the author of waverley" mean anything other than "Scott" or "Scott is the author of waverley" would be false. Hence "the author of waverley" means nothing.

Principia, pp. 66 - 67.

مراجع مختارة

Ambrose, A. & lazerowitz, M., Logic ; The Theory of Formal Inference, New York, 1961.

—————————, Fundamentals of Symbolic logic, New York, 1962.

Aristotle., Prior Analytics, ed. in the basic works of Aristotle, trans. by McKeon, New York 1941.

Basson, A. H. & O'Connor, D. J., Introduction to Symbolic logic, London, 1953.

Bochenski, I.M.. Ancient Formal logic, Amesterdam, Holland, 1951

—————————, A History of Formal logic, trans. and ed/ Ivo Tho as. University of Notre Dame Press, 1961.

Boehner, P., Medieval Logic, Chicago, 1952.

oole, G.; A logical Calculus; ed. in 'Readings on logic' by Copi & Gould; London: 1964.

Breuer., Introduction to the theory of sets; Prentice - Hall; 1958.

Butter, R., The Scaffolding of Russell's Theory of Decriptions, Phil. Rev. 1954.

Carnap, R., Introduction to Symbolic logic and its applications, New York, 9158.

Carney, J. D. & Scheer, R. K., Fundamentals of logic, New York 1964,

Carrnccio, E., Mathematics and logic in History and in Contemporary Thought, London, 1964.

Church, A., Introduction to Mathematical logic, New York, 19°6.

Clark, J. T., Conventional logic, and Modern logic, Woodstock College Press, 1952.

Cohen, M. & Nagel, E., Introduction to logic and Scientific Method New York, 1942.

Cooley, J. C., A Primer of Formal logic, New York, 1942.

Copi, I. M. Introduction to logic, New York, 1961.

————————, Symbolic logic, New York, 1954.

DE Morgan, A., Formal logic. London, 1626.

Dopp, J. M., Formal logic, New York, 1960.

Eaton, R.M., General logic, New York 1959.

Flegg. Boolean algebra and its applications, Blackie, 1934.

Fletcher (ed.), Some Lessons in Mathematics, Cambridge University Press, 1964.

Geach, P., 'Russell's Theory of Descriptions' in Philosophy and Analysis, ed. M. Macdonald. Oxford, 1954.

Goodstein, Boolean algebra, Pergamon, 1963.

Halberstadt, W. H., An Introduction to Modern logic, New York, 1960.

Hilbert, D. & Ackermann, W., Principles of Mathematical logic, New York, 1950.

Honderich, E. D. R., 'Logic and Knowledge', in Philosophy, 1962.

Jager, R., 'Russell's Denotin Complex' in Analysis, 1960.

Jevons, W. S., Elementary lesson in logic, London, 1928.

Jonnson, W. E., Logic. I, II, Cambridge, 1916.

Joseph, H. B. W., Introduction to logic, New York, 1916.

Keynes, J.N., Studies and Exercises in Formal logic, London, 1928

Kneale, W., Boole and the Revival of logic, Mind. Vol. LVII, No. 226, April, 1948.

Knee Bone, G. T., Mathemtical logic and the Foundations of Mathematics, London, 1963.

Langer, S. K., Introduction to Symbolic logic, London, 1937.

Le Blanc, H., An Introduction to Deductive logic, New York, 1957

Lee, H., Symbolic logic, London 1962.

Leonard, H., Principles of Right Reason, New York, 1957.

Lipschutz., Set Theory and related topics, Schaum, 1964.

Lukasiewicz, J., Aristotle's Syllogistic, Oxford, 1951.

Maritain, J., An Introduction to logic, New York 1937.

Mill, J. S., A System of logic, London, 1970.

Mitchell, D., An Introduction to logic, London, 1968.

Mourant, J. A., Formal logic, London 1963.

Parker, F. H. & Veatch, H. B., lcgic as a Human Instrument, New York, 1959.

Prior, A.N., Formal log c, Oxford, 1955.

Quine, W. V., Methods of logic, New York, 1950.

——————, Mathematical logic, New York, 1951.

Ramsey, F., The Foundations of Mathematics and other logical Essays, London, 1931.

Reichenbach, H., Elements of Symbolic logic, New York, 1947.

Rosenbloom; P.; Elements of Mathematical logic, New York; 1954

Russell, B., The Principles of Mathematics; London; 1937.

——————; Introduction to Mathematical Phliosphy. London; 1953.

——————; 'On the Relations of Number and Quantity; in Mind; 1896,

——————; 'Meinong's Theory of Complexes and Assumptions; in Mind 1904.

——————; 'The Theory of Implication; Amer. Jour. of Math. 1906.

——————; The Philosophical Importance of Mathematical logic, in Monist, 1913.

Russell, B., logic and Kuowledge, (ed) by R.C. March London, 1966

Schilpp, P. A., (ed) The Philosophy of Bertrand Russell, New York, 1944.

Schoenman, R. (ed) Bertrand Russell, Philosopher of the Century, London, 1967.

Stebbing, L. S.; A Modern Introduction to logic; New York; 1961

——————————; A Modern Elementary logic; London; New York 1961.

Stoll, R.; Sets, logic and Axiomatic Theories, Freeman, 1961.

Strawson. P. F., Introduction to logical Theory, New York 1952

Suppes. P., Introduction to logic, New York, 1957.

Tarski, A., Introduction to logic, New York 1941.

——————————, logic. Semantics and Metamathematics. Oxford 1956.

Welton, J., Intermediate logic. London 1938.

Whately. R. Elements of logic. Boston. 1943.

Whitehead A. N. & Russell B. Principia Mathematica, New York 1970.

Whitesitt. Boolean algebra and its applications. Addison wesley, 1961.

Wittgenstein. L. Tractatus logic-Philosophicus. trans. into English by D. F. Pears and B. F. McGuinnes. London. 1966.

كشاف الرموز

1	يقرأ universal Class وكان « بول » أول من إستخدام هذا الرمز ليشير به الى « فصل كل الأشياء » ، أى الفصل الكلى .
O	ويقرأ null Class وقد استخدمه « بول » للاشاره الى الفصل الصفرى ، أى « الفصل الذى عضوه لاشىء » .
⊂	رمز الإحتواء inclusion .
∩	يرمز الى التقاطع intersection بين مجموعتين من الأشياء ، ريعبر به عن حاصل الضرب المنطقى logical prodcut .
∪	يرمز إلى الاتحاد union بين مجموعتين من الأشياء ، ويعبر به عن الجمع المنطقى logical sum .
⊢	علامة رمز بها فريجه للتقرير assertion وتدل على أن القضية التى تتحدث عنها مثبتة أو مقررة .
~	يشير هذا الرمز الى النفى negation أو السلب ويقرأ « not »
.	يشير هذا الرمز إلى الوصل Conjunction ويقرأ « and » .
∨	يشير هذا الرمز الى الفصل disjunction ويقرأ « or » .
⊃	يشير الى التضمن implication ويقرأ « imply »
≡	يشير هذا الرمز الى التكافؤ equivalenec ويقرأ equivalent

$\backslash$ رمز يشير الى عدم الاتفاق incompatibility ويقرأ Stroke

$<\equiv>$ رمز يشير به بول الى التضمن بين المجاميع ويقرأ imply ،

$\neg$ رمز يشير به أنصار المنطق الحدسي الى النفي negation

$\wedge$ رمز يشير به أنصار المنطق الحدسي الى الوصل Conjunction ويعرف برابط البدائل .

X رمز يشير الى السور الكلي universal quantier للقضية ، ويقابل في المنطق التقليدي كلمة كل . ويقرأ في كل قيم χ .

$\exists X$ رمز يشير الى السور الجزئي أو الوجودي existential للقضيه ، ويقابل في المنطق التقليدي كلمه « بعض » . ويقرأ في بعض قيم χ .

ϕ رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ phi

ψ رمزيا رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ psi .

χ رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ Chi

θ رمز رياضي مأخوذ من اليونانية . ويقرأ thèta

ε رمز رياضي يرمز به في نظريه حساب الفصول الى عضويه الفرد في فصل ويقرأ epsilon .

— رمز النفي في نظريه حساب الفصول ويقرأ not

V رمز يشير به المذهب اللوجستيقي للفصل الكلي في نظرية حساب الفصول في مبادىء الرياضيات .

Λ رمز يشير به المذهب اللوجستيقى للفصل الصغرى فى اطار نظرية حساب الفصول

$\exists ! a$ رمز مستخدم فى نظريه حساب الفصول ويرمز به لوجود الفصل ويقرأ a pxists

$\succ$ رمز رياضى يشير الى علاقة أكبر من ويقرأ greater than

$\prec$ رمز رياضى يشير الى علاقة أصغر من ويقرأ less than

$\dot{V}$ رمز يستخدم فى نظرية حساب العلاقات ويشير الى العلاقه الكلية nniversal relation

$\dot{\Lambda}$ يشير هذا الرمز فى نظريه حساب العلاقات الى العلاقه الصغريه null relation

$\dot{\exists} ! R$ يشير هذا الرمز فى نظريه حساب العلاقات الى العلاقه التى تقوم بين زوج واحد من الحدود على الأقل ويقرأ R-exists

$\breve{R}$ رمز يشير الى عكس العلاقه R ويقرأ R-Converse

D'R رمز يشير الى ميدان العلاقه

D'R رمز يشير الى عكس الميدان

C'R رمز يشير الى مجال العلاقه

$R \dot{|} S$ رمز يشير الى حاصل الضرب النسبي لعلاقتين

$(\iota x)(\phi x)$ يشير هذا الرمز فى نظرية الاوصاف الى قيم $\hat{x}$ التى تحقق الدالة $\phi \hat{x}$

$E!(\iota x)(\phi x)$ يشير هذا الرمز فى نظرية الاصاف الى وجود القيمة x التى تحقق الدالة ϕx ويختلف معنى هذا الرمز عن الرمز $\exists$ المستخدم فى نظرية حساب المحمول .

الباب الأول

من المنطق الصورى إلى المنطق الرياضى

الباب الثانى

رسل : بين المنطق التقليدى وبين المنطق الرياضى

الباب الثالث

الصله بين المنطق والرياضية

الباب الرابع

نظريات المنطق الرياضى

الباب الخامس

نظرية الأوصاف


Bibliotheca Alexandrina
0225047